I-118　　任意形状の節点帯板要素の一定式化

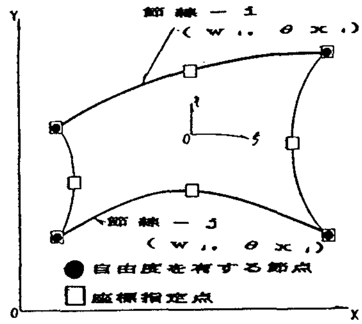
日本電信電話(株)　正会員　廣見　宰
長岡技術科学大学　正会員　林　　正

１．まえがき

本研究では、任意形状のＦＥＭ要素[1]や、有限帯板要素[2]の定式化において、厚板要素を親要素に用いる従来の手法よりも簡単な離散Kirchhoff 要素の定式化を提案する。さらに、これらの要素を組み合わせて任意形状の節点帯板要素を定式化し、平板の曲げ解析を行なった結果について報告する。

２．解析仮定

(1) 要素概要：要素は、デカルト座標系のｘ－ｙ平面上に存在するものとし、要素座標系としては区間［－１，１］で定義される正規曲線座標系（ξ，η）を用いる。写像変換には、８節点アイソパラメトリック要素の形状関数を用いるために、要素に８個の座標点を設ける。解析自由度は要素の長手方向の二辺上と要素の隅角点４点に設ける。これにより、任意形状の節点帯板法でありながら自由度の数は従来の長方形節点帯板法と同じである。



図－１　節点帯板要素

(2) ヤコビ行列：変位関数の偏微分関数を求めるために、次のヤコビ行列$\boldsymbol{J}$を用いる。

$$\begin{Bmatrix} \partial\Phi/\partial\xi \\ \partial\Phi/\partial\eta \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}\cdot\begin{Bmatrix} \partial\Phi/\partial x \\ \partial\Phi/\partial y \end{Bmatrix} \qquad (1) \qquad\qquad \boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}^{-1}=\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$dy = J_\eta \cdot d\eta \quad , \quad J_\eta = \sqrt{J_{21}^2 + J_{22}^2} \qquad (3)$$

(3) 定式化：曲げの変位関数を定式化する段階において、薄板の条件である Kirchhoffの拘束条件を付加する。この拘束条件が、節点形状関数の算出においては隅角点上で成立するとし、節線形状関数の算出においては要素の長手方向の節線上において成立するとして定式化を行なうものとすると次式が得られる。

節点拘束条件：

$$\left.\begin{aligned} \theta_x &= \partial w/\partial y = I_{21}\cdot\partial w/\partial\xi + I_{22}\cdot\partial w/\partial\eta \\ -\theta_y &= \partial w/\partial x = I_{11}\cdot\partial w/\partial\xi + I_{12}\cdot\partial w/\partial\eta \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

節線拘束条件：

$$\theta_x = \partial w/\partial y = \partial w/\partial\eta / J_\eta \qquad (5)$$

３．変位関数

(1) 変位関数：節点帯板法のたわみｗの変位関数は、節点と節線の一般化変位ベクトルを$\boldsymbol{d}_0$，$\boldsymbol{d}_m$とすると、式(4) を各節点に、式(5) を各節線に用いて以下のように求められる。

$$\boldsymbol{d}_0 = \{w_1,\ \theta_{x1},\ \theta_{y1},\ w_2,\ \theta_{x2},\ \theta_{y2},\ w_3,\ \theta_{x3},\ \theta_{y3},\ w_4,\ \theta_{x4},\ \theta_{y4}\}^T \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{d}_m = \{w_{im},\ \theta_{xim},\ w_{jm},\ \theta_{xjm}\}^T \qquad (m=1\sim\infty) \qquad (7)$$

$$w = \sum_k (N_{wk}\cdot w_k + N_{\theta xk}\cdot\theta_{xk} - N_{\theta yk}\cdot\theta_{yk}) + \sum_m f_m\cdot(L_{wi}\cdot w_{im} + L_{\theta xi}\cdot\theta_{xim} + L_{wj}\cdot w_{jm} + L_{\theta xj}\cdot\theta_{xjm}) \qquad (8)$$

$$(k=1\sim4,\ m=1\sim\infty)$$

(2) 節点形状関数： Kirchhoffの拘束条件を含む形状関数はそれぞれ次式のようになる。ＡＣＭ形状関数と格子梁形状関数は長方形要素を解析する場合、従来のＦＥＭ要素の形状関数に一致する。ここで、J_{lnk} (l,n=1,2) はヤコビ行列の各節点ｋ上における値であり、 (ξ_k,η_k)は各節点上の局所座標値を示す。なお、式(8) の右辺第１項または第２項のみを用いる場合には、それぞれＦＥＭ要素または有限帯板要素になる。

ＡＣＭの形状関数：

$$\left.\begin{aligned}
N_{wk} &= (1+\xi_0)\cdot(1+\eta_0)\cdot(2-\xi^2-\eta^2+\xi_0+\eta_0)/8\\
N_{\theta xk} &= J_{12k}\cdot N_\xi + J_{22k}\cdot N_\eta\\
N_{\theta yk} &= J_{11k}\cdot N_\xi + J_{21k}\cdot N_\eta\\
N_\xi &= -(1+\xi_0)\cdot(1+\eta_0)\cdot\xi_k\cdot(1-\xi^2)/8\\
N_\eta &= -(1+\xi_0)\cdot(1+\eta_0)\cdot\eta_k\cdot(1-\eta^2)/8
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

格子梁の形状関数：

$$\left.\begin{aligned}
N_{wk} &= (2+3\cdot\xi_0-\xi_0{}^3)(2+3\cdot\eta_0-\eta_0{}^3)/16\\
N_{\theta xk} &= J_{12k}\cdot N_\xi + J_{22k}\cdot N_\eta\\
N_{\theta yk} &= J_{11k}\cdot N_\xi + J_{21k}\cdot N_\eta\\
N_\xi &= (-\xi_k-\xi+\xi_k\cdot\xi^2+\xi^3)(2+3\cdot\eta_0-\eta_0{}^3)/16\\
N_\eta &= (2+3\cdot\xi_0-\xi_0{}^3)(-\eta_k-\eta+\eta_k\cdot\eta^2+\eta^3)/16
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

$$\xi_0=\xi_k\cdot\xi \qquad \eta_0=\eta_k\cdot\eta \qquad (k=1\sim4)$$

(3) 節線形状関数：節線の展開関数には、境界条件を満たす長方形要素の多項式を用いる。ここで、$J_{\eta i}$ と $J_{\eta j}$ は要素の節線上における線素のヤコビアンの値であり ξ の関数となる。

要素の幅方向の形状関数

$$\left.\begin{aligned}
L_{wi} &= (2+3\cdot\eta-\eta^3)/4\\
L_{\theta xi} &= J_{\eta i}\cdot(\eta^3+\eta^2-\eta-1)/4\\
L_{wj} &= (2-3\cdot\eta+\eta^3)/4\\
L_{\theta xj} &= J_{\eta j}\cdot(\eta^3-\eta^2-\eta+1)/4
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

展開関数　（両端固定）

$$f_m=(1-\xi^2)^2\cdot\xi^{(m-1)} \qquad (12)$$

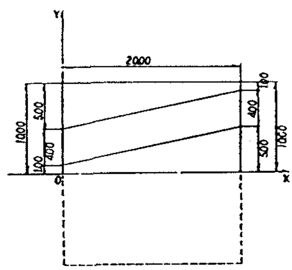
展開関数　（両端単純支持）

$$f_m=\{(2m+3)-(2m-1)\cdot\xi^2\}\cdot(1-\xi^2)\cdot\xi^{(m-1)} \qquad (13)$$

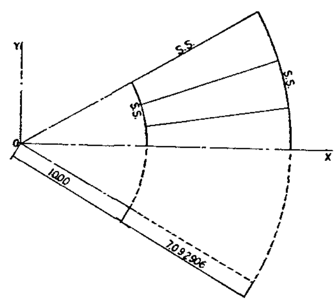
４．数値計算

上記の節点と節線の形状関数を式(8) に代入すると任意形状の節点帯板要素の変位関数が得られる。任意形状のＦＥＭ要素としては式(10)よりも式(9) のＡＣＭの形状関数の方が精度のよい結果が得られるが、これに節線自由度を組合わせると式(10)の方が精度がよいので、以下の計算例では式(10),(11),(13)を用いた。

図－２の正方形板と図－３の扇形板の計算結果をｘ軸上の応力 σ_x に注目して図－４，５に示す。境界条件は全辺単純支持とし、荷重は満載等分布荷重とする。数値計算に用いる展開関数の項数は３項とする。図－４より、節点帯板法における節点自由度の効果が理解されるであろう。



図－２　正方形板の要素分割



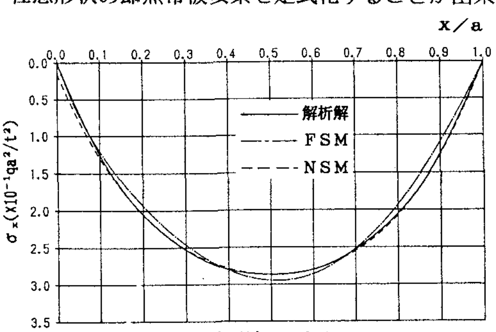
図－３　扇形板の要素分割

５．結　論

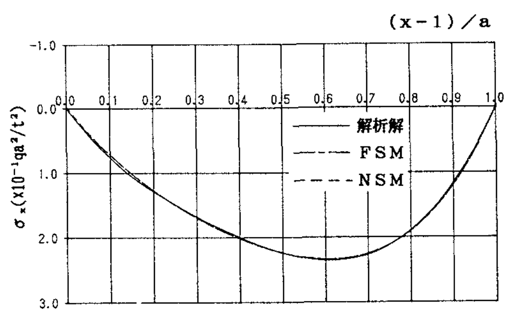
1)従来よりも簡便な定式化の手法を考案して、離散Kirchhoff 要素によるスーパーパラメトリック有限要素を開発した。

2)上記の写像変換の方法を用いて、従来の展開関数をそのまま利用できる任意形状の有限帯板法を開発した。

3)任意形状の有限要素法と有限帯板法の形状関数を用いて、精度のよい任意形状の節点帯板要素を定式化することが出来た。



図－４　正方形板の応力 σ_x



図－５　扇形板の応力 σ_x

1)Zienkiewicz,O.C.:マトリックス有限要素法,培風館,1984.　2)林・藤井:土木学会論文集,No.410,1989.