土木学会第45回年次学術講演会（平成２年９月）

I-113　有限帯板モデルを用いた厚い扇形板の自由振動解析について

大同工業大学　正会員　水澤　富作
加賀田組　正会員　○石田　健生
小原建設　金内　真

１．　はじめに　曲線スラブなどに用いられる扇形板は、不等支点反力を受けるので長方形板とはかなり異なった力学的挙動を示す。これまでにも、走行荷重や地震荷重を受ける扇形板の動的応答解析や自由振動解析が行われてきたが、薄板理論に基づく研究がほとんどである。このような扇形板の自由振動解析には、解析的手法、Rayleigh-Ritz法、有限要素法や有限帯板法が広く用いられている。 しかしながら、板厚の増大に伴い横せん断や面内及び面外回転慣性の影響が大きく生じてくるので、これらの影響が無視できなくなる。これまでにも、これらの影響を考慮して、 Mindlinの板理論やReissnerの板理論に基づく解析的手法、有限要素法、積分方程式法や有限帯板法により、中等厚さの扇形板の自由振動解析が行われている。また、Cheung, M.S.ら(1981)[1]は、２次元と３次元の有限帯板モデルを用いて、周辺単純支持された扇形板の自由振動解析を行っている。

本研究では、 ３次元有限帯板モデルである有限プリズム法とMindlinの板理論に基づく有限帯板法を用いて，厚い扇形板の自由振動解析を行っている。 Fig. 1に示すような任意の板厚の扇形板について、両者の手法の比較検討を行い、 また扇形板の振動数に与える板厚比や境界条件の影響について示している。

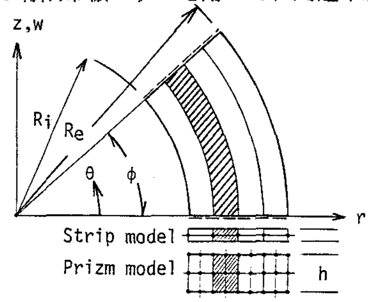


Fig. 1 Annular sector strip models

２．　式の定式化　有限帯板法(Cheung, Y.K. 1968)、有限プリズム法(Too, J.J.M. 1971) が提案されて以来、種々の板問題に適用され、その有用性が示されてきた[2]。 この離散化要素モデルでは、変位関数を一方向に級数展開することにより、次元数を一つ下げることができるので経済的に問題を解くことができる。また、最近では、この離散化概念と用いる変位関数の種類により、種々の帯板要素モデルも提案されている。これらの要素モデルを用いた厚板解析では，Mawenya(1973)が、Mindlin板理論に基づく帯板要素により厚板の曲げ解析を行い、Benson(1973)がこの要素を厚板の振動と座屈解析に適用している。一方、Cheung, M.S.ら(1981)は、８節点の有限プリズム法により厚板の振動解析を行っている。

ここでは、任意の厚さの扇形板の振動解析を行うために、Fig. 1に示すように、極座標系で表される２節線の扇形帯板要素と９節点のアイソパラメトリック・曲線プリズム要素について、簡単に述べる[3]。

２．１　扇形帯板要素　この要素は、Mindlin-Reissner理論に基づき、曲げひずみとせん断ひずみエネルギーより導かれる。せん断剛性マトリックスには、断面のそりを考慮したせん断係数β=5/6を用いている。質量マトリックスには、回転慣性の影響も考慮されている。また、節線変位ベクトル{u}は、たわみと２つの回転角よりなり、 {w, θr, θφ} で表すと、$u=\Sigma\Sigma N_i^p\ a_i^p$で定義する。ここで、Pとｉは それぞれ級数項の数と帯板要素の節線の数であり、N_i^pは形状関数である。

２．２　曲線プリズム要素　３次元弾性理論に基づき、中心角θ方向に級数展開することにより、Fig. 1に示すような２次元のプリズム要素が得られる。 ２次元方向には、 座標関数と形状関数に同じ補間式を用いて、９節点のアイソパラメトリック要素で離散化している。この要素の変位関数{u}は，{u, v, w} で定義される。ここで、半径方向の支持線で、単純支持されているものとすると、{u}は次式で与えられる。 $u=\Sigma\Sigma N_i^p\ a_i^p$。ここで、$a_i^p=\{u_i^p, v_i^p, w_i^p\}^T$、ｐは要素の節点の数である。 N_i^pは形状関数であり、右式で与えられる。ただし、$C_p=\sin(p\theta)$, $S_p=\cos(p\theta)$である。質量マトリックスは、整合モデルを用いている。

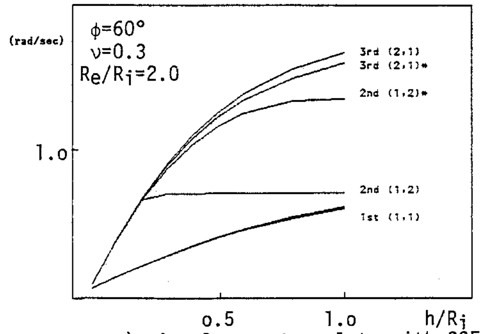
$$N_i^p=\begin{bmatrix} N_iC_p & 0 & 0 \\ 0 & N_iC_p & 0 \\ 0 & 0 & N_iS_p \end{bmatrix}$$

３．　数値計算例及び考察　はじめに、先に述べた２つの要素モデルの精度を示すために、厳密解や

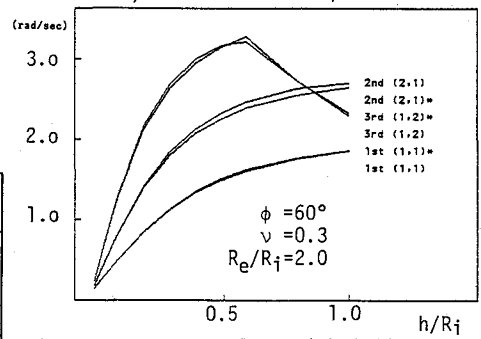
他の数値解との比較を行った。また、精度の高い結果を得るために、有限帯板要素法（ＭＦＳＭ）では、40帯板要素に分割し，また有限プリズム法（ＦＰＭ）では20プリズム要素を用いた。厚い扇形板の振動特性を示すために、振動数(rad/sec)に与える板厚比,(h/Ri),中心角,ϕや円周方向の境界条件の影響について検討した。 Table 1では,周辺単純支持された扇形板(ϕ=100°, Re/Ri=20.0)の振動数(rad/sec)を解き,他の解析法と精度比較が示されている。 FPM*は、Cheungらの8節点プリズム要素による解であり、他の値はすべて薄板理論によるものである。これより、本文で用いた２つの要素モデルによる解はよく一致している。またCheungらの値とも一致しているが，板厚が大きくなると、薄板理論による解は，10-30%も大きな値を示している。次に，円周方向の境界条件が，単純支持，固定及び自由である扇形板（Re/Ri=2.0, R1=1.0、ν=0.3）の振動解析を行った。ここで、板厚比，h/Riを0.01から1.0まで変化させ,また中心角，ϕは30°,45°，60°，90° とした。 厳密解のある薄板(h/Ri=0.01)と比較したが、 非常に良く一 致した結果を 得ている。 Fig. 2-a),b),c)には、２つの帯板要素の厚板問題への適応性を調べるために、それぞれ３次モードまでの振動数が、 板厚比で示してある。これより、一般に、MFSMの解は、プリズム要素の値より、少し小さく、板厚の増大と共に、両者の差が大きくなる。しかし、自由辺を含む問題で、特に、半径方向に逆対称モードが生じるときは、プリズム要素による解が板厚比に関係しない剛体モードが現れてくる。この現象は、板厚比が０．２を越えると生じてくる。

Table 1 Comparison of natural frequencies(rad/sec) of simply supported annular sector plates:E=1.0, ϕ=100°, ν=0.3, Ri=1.0, Re/Ri=20.0, ρ=1.0

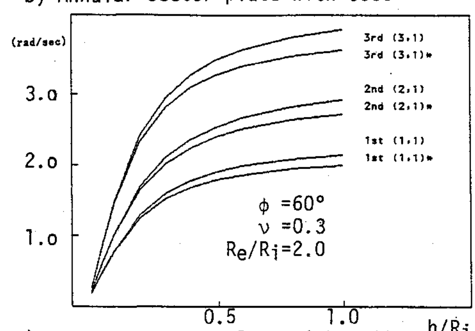
h/(Re-Ri) (h/Ri)	Modes 1	2	3	4	5	Methods
0.0701 (1.3333)	0.02302	0.04858	0.06379	0.08074	0.1038	FPM
	0.02298	0.04830	0.06338	0.08004	0.1027	MFSM
	0.0234	0.0477	0.0619	0.0829		Analytical
	0.0232	0.0485	0.0641	0.0808		FPM*
0.1052 (2.0000)	0.03387	0.07010	0.09103	0.1140	0.1448	FPM
	0.03369	0.06940	0.08994	0.1123	0.1420	MFSM
	0.0335	0.0715	0.0928	0.1243		Analytical
	0.0338	0.0695	0.0908	0.1129		FPM*
0.1403 (2.6667)	0.04402	0.08906	0.1142	0.1418	0.1770	FPM
	0.04368	0.08772	0.1122	0.1385	0.1725	MFSM
	0.0447	0.0954	0.1237	0.1657		Analytical
	0.0439	0.0884	0.1134	0.1398		FPM*
0.2105 (4.0000)	0.06185	0.1193	0.1496	0.1817	0.2221	FPM
	0.06095	0.1184	0.1454	0.1759	0.2140	MFSM
	0.0870	0.1430	0.1856	0.2486		Analytical
	0.0614	0.1177	0.1477	0.1785		FPM*



a) Annular sector plate with SSFF



b) Annular sector plate with SSSS



c) Annular sector plate with SSCC

Fig. 2 Comparison of Strip and Prizm models

４． あとがき 本研究で得た結果を簡単に述べると、次のとうりである。1) ここで用いた帯板要素とプリズム要素は、薄板問題から厚板問題まで適用できる。2) 板厚比が 0.2 以下であれば、２つの要素による結果は、非常によく一致している。3) また、Mindlinの帯板要素を用いても、自由辺を含まないかなり厚い板の振動数を求めることが可能である。4) 自由辺を含む振動解析では、板厚比が0.2を越えると、横せん断変形の影響が大きく現れ、この影響を近似的に考慮するMindlinの帯板要素の値は、 かなり過大評価された値が示される。

参考文献

1) Cheung, M.S. and Chan, M.Y.T.(1981), Static and dynamic analysisof thin and thick sectorial plates by the finite strip method. Comput. & Struct., vol. 14, 79-88. 2) Wiseman, D.L. et al.(1987), Recent developments of the finite strip method. Dynamics of Structures, ASCE, 292-309. 3) Hinton, E.:Dynamic analysis of plates and shells. Pineridge, 1988.