

## T-111 2カ所の単純支持型混合境界値問題の薄板の面外曲げに関する研究

J R 東 海 正会員 三 輪 昌 弘  
名古屋工業大学 正会員 長 谷 部 宣 男  
名古屋工業大学 正会員 中 村 卓 次

《1》はじめに 薄板の曲げ問題を解くとき、境界条件は曲げモーメントと置換せん断力で与えられる外力と、互いに直角な関係の2方向のたわみ角で与えられる変位境界の合計4成分のうち、いずれか2成分の組合せによって与えることができる。外力、変位のそれぞれ1成分ずつが与えられる場合を単純支持型混合境界と呼ぶ。これを応用した一例として、力学問題には対称性を利用して置き換えの可能なものがあり、その対称軸上には単純支持型の境界条件の見られる場合が多い。ここでは直線で与えられる対称軸上の2ヵ所に、単純支持型混合境界を有する形状の薄板について、無限遠方で一様曲げを受ける場合を解き、応力分布とクラック問題への応用について述べる。〔1〕

《2》解析方法 解析例として、図1(a)のような端部、内部の2つのクラックが半無限板内に一直線上に発生した場合を解く。解析領域を単位円内に写像する有理写像関数と複素応力関数による解法を用いる。図1(b)のように座標をとり、クラック間の接合部(CD)を切断して置き換えるとき、2ヵ所の境界 $M_1$ 及び $M_2$ で、 $y$ 軸方向のたわみ角 $\partial w / \partial y = 0$ 、置換せん断力 $p = 0$ とすれば両者の状態を等しくすることができる。図1(b)を図1(c)に写像する関数は式(1)で与えられる。

$$z = \omega(\zeta) = \frac{E_0}{1 - \zeta} + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_c \quad (1)$$

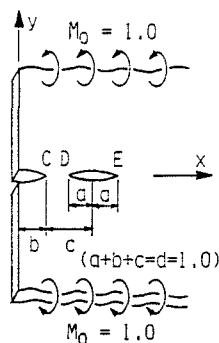


Figure 1(a)

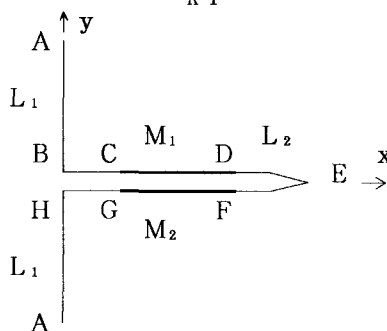


图 1 (b)

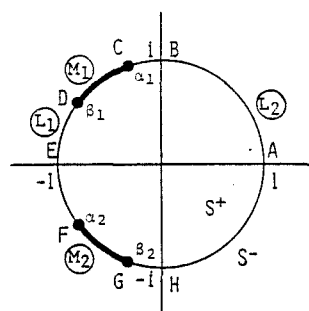


图 1 (c)

解析領域を $S^+$ 、それ以外を $S^-$ とし、以下の添字符号はこれに従う。上述の $M$ 以外の境界を $L_1$ 、 $L_2$ とする(図1(b)、図1(c))。たわみに関する複素関数を $\phi(\zeta)$ とすると、 $L$ 上での境界条件式は次式で表せる。

$$\phi^+(\sigma) - \phi^-(\sigma) = -\frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{1}{D(1-\nu)} \int_L [\operatorname{Im}(s) + i \int p(s) ds] dx + iG_{12} + G_2 + iG_3 \right\} \quad (2)$$

ここに $\sigma$ は境界上の $\zeta$ を表す。また $M$ 上での境界条件式は、 $R(\zeta)$ を任意の有理関数として式(3)で表せる。

$$\phi^+(\sigma) + \phi^-(\sigma) = \frac{1}{\kappa + 1} \left[ L(\sigma) + \kappa M^+(\sigma) + M^-(\sigma) \right] + R(\sigma) \quad (3)$$

ただし、  $L(\sigma) = 2i \frac{\partial w}{\partial y}$  ,  $M(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{N(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma$  ,

$$N(\sigma) = -\frac{2i}{\kappa} \left\{ \frac{1}{D(1-\nu)} \int_M \left\{ \int p(s) ds \right\} dx + G_1 x + G_2 \right\}$$

式(2)、(3)を満足する $\phi$  ( $\xi$ ) は、Riemann-Hilbert 問題に帰着され一般解を得ることができる。最終的に次

式の形に求められる。

$$\begin{aligned}\phi(\zeta) &= \phi_0(\zeta) + \phi_1(\zeta), \quad \phi_0(\zeta) = -\frac{M_0}{4D(1+\nu)} \omega(\zeta), \\ \phi_1(\zeta) &= H_1'(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\overline{A_{1k}} B_k}{(\zeta_k - \zeta)^2} \left( 1 + \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} + (\zeta_k - \zeta) \frac{\chi'(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_{1k} \overline{B_k} \zeta_k'^2}{(\zeta_k' - \zeta)^2} \left( 1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k')} - (\zeta_k' - \zeta) \frac{\chi'(\zeta)}{\chi(\zeta_k')} \right) \right\}, \\ H_1'(\zeta) &= \frac{M_0}{4D(1+\nu)} \left\{ \omega'(\zeta) - \frac{E_0}{\chi(1)} \left\{ \frac{\chi(\zeta)}{(1-\zeta)} \right\}' \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{E_k}{(\zeta_k - \zeta)^2} \left( 1 + \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} + (\zeta_k - \zeta) \frac{\chi'(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\overline{E_k} \zeta_k'^2}{(\zeta_k' - \zeta)^2} \left( 1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k')} - (\zeta_k' - \zeta) \frac{\chi'(\zeta)}{\chi(\zeta_k')} \right) \right\} \right\} \\ &\quad + \frac{G_2}{4\pi\kappa} \frac{\chi(1)}{\chi(\zeta)} \left\{ -2I_0 \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + (1-\beta_1)(1-\beta_2)}{(1-\alpha_1)(1-\beta_1)(1-\alpha_2)(1-\beta_2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} I_0 \left( \frac{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} + \frac{(1+\beta_1)(1+\beta_2)}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)} \right) - I_2 \right\} \quad (4)\end{aligned}$$

$\chi(\zeta)$ はPlemelj関数で、単位円上の点 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ を用いて次式で表せる。

$$\chi(\zeta) = (\zeta - \alpha_1)^{0.5} (\zeta - \beta_1)^{0.5} (\zeta - \alpha_2)^{0.5} (\zeta - \beta_2)^{0.5}$$

《3》解析結果 得られた応力分布の一例を図2に示す。またそれぞれのクラック端の応力拡大係数〔2〕により、クラック進展に関する振る舞いについての一考察を試みたのが図3である。クラックの長さは半無限板に対して十分小さく、クラックが進展するにつれて荷重を減少させ、1ヵ所だけの応力拡大係数が破壊靱性値を上回るときを考える。初期状態は $b/d=0.01, a/c=0.025$ とし、1ステップでクラック長を0.01進展させる。非対称モードの応力拡大係数 $k_s$ は常に0であるため、対称モードの応力拡大係数 $k_B$ の大小のみで比較できる。横軸はクラック先端の位置を示し、縦軸はそのときの $k_B$ を表している。このとき、まず内部クラックが内部方向に進展し、 $x=1.77$ 付近で進展方向が変わり、クラック間の接合部が破断する。

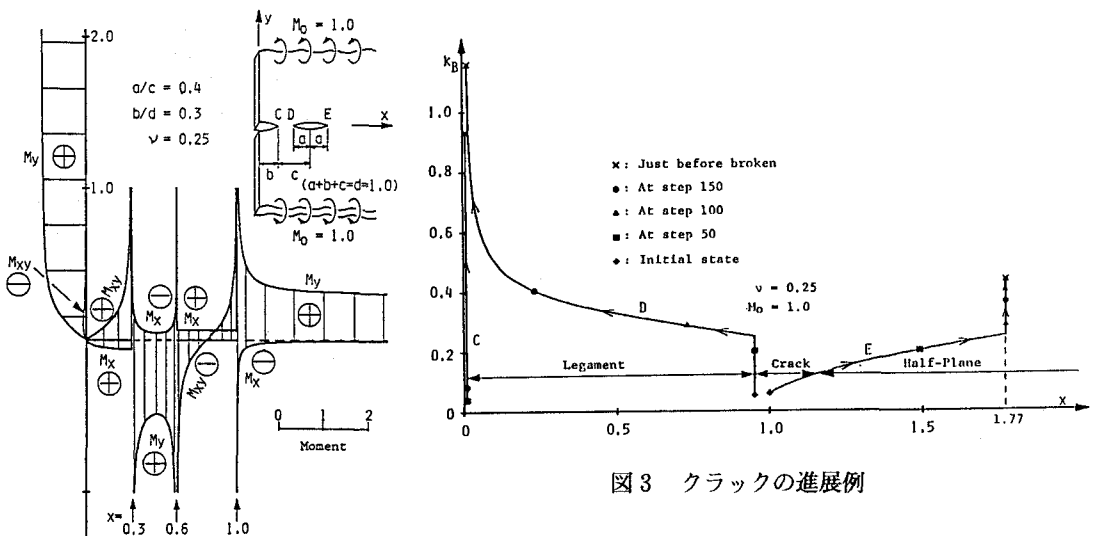


図3 クラックの進展例

【文献】〔1〕Hasebe, Inohara, Ing. Arch. 49, 1980

〔2〕Hasebe, Jour. Engng. Mech. ACSE 110, 1984

図2 応力分布