土木学会第45回年次学術講演会（平成２年９月）

I-110　非平衡熱力学を基礎とする破壊基準と安定条件

東北大学工学部　正員　新関　茂

１）まえがき

破壊現象は、ある状態にある物体の安定性の喪失による破壊面の形成にともなってエネルギーの散逸の生じる自然現象の１つである。このような、自然現象に例外なく一般的に適用される物理法則には、熱力学第１及び第２法則がある。　熱力学の第２法則は、エネルギー散逸の生じている系では、エントロピー生成率（散逸エネルギー／絶対温度）は、常に正であると表現される。また、あらゆる物体は非常に多くの原子または分子から構成されており、これらの原子または分子は常に熱運動を行っている。この熱運動により、物体の内部には絶えずゆらぎ現象が存在し、このゆらぎ現象のため、様々な物理量の値も最確値を中心としてゆらいでおり、これらの値はある統計的な分布をなしている。ゆらぎの存在は、Brown運動の観察(1823年)とこの運動を説明するためのEinsteinの理論(1905年)の対比により初めて明らかにされたものである。従って、Newton力学を基礎として、発展してきた古典的な連続体力学などでは、上記のような歴史的理由もあってゆらぎ現象を考慮せず最確値を用いて記述されている。

本文は、熱力学第一及び第二法則を用い、ゆらぎ現象を考慮し、破壊基準と安定条件を統一的に導いたものである。

３）非平衡熱力学に基ずいた新しい安定性理論

まず、初めに、安定性の物理的定義は、次のように述べられる。『任意の微小な摂動をある非平衡(不可逆)現象に与えても、時間と共に消失し、摂動を与える前の現象と定性的に異なった現象へと発展しないならば、この非平衡現象は、安定である。』

自然界では、ゆらぎがこの安定性の定義の中の摂動の役割を果たしており、ゆらぎの消失（ゆらぎの有するエネルギーの散逸）は熱力学第２法則によって支配されている。また、熱力学第１法則は、エネルギーの変換や流れにおいて、エネルギーの総量は不変であることを表しているとともに、このエネルギーの変換や流れの関係を記述している。従って、非平衡現象の安定性は、熱力学第１法則によって記述されたエネルギー変換や流れの関係の安定性と等価であると考えられる。（機械）力学的及び熱的エネルギーだけに関する熱力学的系を考察の対象とすれば、直交座標系を用いてこの系内の単位体積に関する熱力学第１法則は次のように記される。

$$\rho\dot{e}=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+q_{i,i}+\rho\gamma \tag{1}$$

ここに、ρ, e、σ_{ij}、ε_{ij}、q_i及びγは、それぞれ、密度、内部エネルギー、応力テンソル、歪テンソル、熱流束ベクトル及び内部熱源からの発熱量である。全比エントロピー 変化率 $\dot{s}$は、物体内部の散逸エネルギーと関連しているエントロピー生成率${}_i\dot{s}$と系の外部 からの熱量の流入によるエントロピー流束${}_e\dot{s}$から構成され、次のように表される。

$$\dot{s}={}_i\dot{s}+{}_e\dot{s} \tag{2}$$

ここに　$\rho\,{}_e\dot{s}=(q_i/\theta)_{,i}+\rho(\gamma/\theta)$　(3)

であり、熱力学第２法則は

$${}_i\dot{s}\geqq 0 \tag{4}$$

と記される。式(1)～(4)より、Clausius-Duhemの不等式を導き、再び式(3)を用いれば、

$$\rho\theta\,{}_i\dot{s}\geqq\rho\dot{e}-(\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+q_{i,i}+\rho\gamma) \tag{5}$$

上式を体積々分し、右辺に平衡方程式と歪一変位関係を用いて、

$$\int_V\rho\theta\,{}_i\dot{s}\,dv\geqq\int_V\rho\dot{e}\,dv-\left(\int_V\hat{f}_i\dot{u}_i\,dv+\int_{\partial V_\sigma}\hat{t}_i\dot{u}_i\,ds\right) \tag{6}$$

ただし、$\hat{f}_i$と$\hat{t}_i$は、それぞれ、与えられた物体力と境界∂V_σ上の表面力であり、∂V_uでは $u_i=0$ とする。歴史的に、熱力学の創始者達には必ずしも認識されなかったが、熱力学第２法則は、かって、微小ゆらぎの存在下で確立されたのであり、式(6)の左辺と右辺の関係は、熱力学第２法則から生じるものであるから、式(6)は、微小ゆらぎの生じている状態に対しても適用可能である。従って、微小ゆらぎが非平衡現象内に生じても、安定状態であるためにはエントロピー生成率は常に正でなければならないという条件を式(6)通じて要求すれば、次の不等式が得られる。

$$\int_V\rho\dot{e}\,dv-\left(\int_V\hat{f}_i\dot{u}_i\,dv+\int_{\partial V_\sigma}\hat{t}_i\dot{u}_i\,ds\right)>0 \tag{7}$$

上式は式(4)で表現されたエントロピー生成率の2つの可能性（ゼロと正）の内から、式(6)を通じて正の場合だけを選んだことに相当する。逆に、式(7)が成立すれば、式(6)により、エントロピー生成率は常に正であり、系内の（利用可能な)エネルギーやゆらぎに伴うエネルギーは散逸し、ゆらぎ現象も時間と共に消失する。熱力学第１法則は、ゆらぎ現象の発見される前に確立されたものであるから、当然、ゆらぎを含まない値である最確値を用いて記述されていると考えられる。式(1)を式(5)の右辺の場合と同様な条件の下に体積々分し、式(7)と組み合わせれば、

$$\int_V \rho \dot{e} dv \geqq \left(\int_V \hat{f}_i \dot{u}_i dv + \int_{\partial V_\sigma} \hat{t}_i \dot{u}_i ds \right) \tag{8}$$

また、両辺に微小時間dtを掛けて容易に、次の増分形に書き換えられる。

$$\int_V \rho\, de dv \geqq \left(\int_V \hat{f}_i du_i dv + \int_{\partial V_\sigma} \hat{t}_i du_i ds \right) \tag{8'}$$

式(8)と(8)'の不等号と等号は、それぞれ、物体に関する安定条件及び熱力学第１法則を表している。

３）新しい安定性理論の破壊力学への応用

ここでは、簡単のために、単位厚さで２次元の広がりをもつ変形理論にしたがう塑性体（非線形弾生体）中のクラックの進展問題への上記の安定性理論の応用について説明する。変形理論にしたがう塑性体中のクラックが単位面積進展する場合、熱力学第１法則は、Gを破壊靭性、Uを歪エネルギー、ℓをクラック長として、次のように記される。

$$G = -\int_V \frac{dU}{d\ell} dv + \int_V \hat{f}_i \frac{du_i}{d\ell} dv + \int_{\partial V_\sigma} \hat{t}_i \frac{du_i}{d\ell} ds \tag{9}$$

したがって、式(8)を導いたと同様の手順により、次の不等式が導かれる。

$$G \geqq J \tag{10}$$

ただし、Jは式(9)の右辺を表すものとする。上式の等号は、破壊規準、不等号は安定（クラックが安定な成長をする）条件を表している。上式の左辺が最確値（通常、観察される巨視的値）$[G]^*$に一致し、右辺がゆらぎを含んだ値をとるものとすれば、上式は

$$[G]^* \geqq J \tag{11}$$

さらに、この式は

$$[G]^* = [J]_{max.} \tag{12}$$

と書き換えられる。また、式(10)の左辺が最確値に一致し、右辺はゆらぎを含んだ値をとるものとすれば、同様にして、

$$[G]_{min.} = [J]^* \tag{13}$$

が成立する。最確値$[G]^*$と$[J]^*$は熱力学第１法則(1)（または、式(10)の等号）により、当然、一致しなければならないから、

$$[G]_{min.} = [J]_{max.} \tag{14}$$

が成立する。式(12),式(13)及び式(14)は、様々な場合に対する新しい破壊規準となっており、クラックの進展開始やその方向などを決定することができる。例えば、特別な場合として、破壊靭性値Gが等方的で一定な値G_cをとる場合、上式は、

$$G_c = [J]_{max.} \tag{15}$$

と書き換えられ、ErdoganとSih(1963年)によって提案された最大エネルギー解放率規準となる。

次に，クラックが安定な成長をするための条件について考察する．クラックが成長中の場合、当然、熱力学第１法則(9)は満足されており，この場合には，式(10)の等号が対応しているから，

$$G(\ell) = J(\ell) \tag{16}$$

クラックが安定に成長するには，式(10)の不等号で表された安定条件により，任意の微少なクラックの増加$\delta\ell$に対して、次式が成立しなければならない。

$$G(\ell + \delta\ell) > J(\ell + \delta\ell) \tag{17}$$

上式の両辺を$G(\ell)$と$J(\ell)$の近傍において、第１次の項までテイラー展開し

$$G(\ell) + \frac{dG(\ell)}{d\ell}(\delta\ell) > J(\ell) + \frac{dJ(\ell)}{d\ell}(\delta\ell) \tag{18}$$

式(16)を考慮すれば，上式は

$$T_G > T_J \tag{19}$$

$$\text{ここに}\quad \left. \begin{aligned} T_G &= E dG(\ell)/\{(\sigma_o)^2 d\ell\} \\ T_J &= E dJ(\ell)/\{(\sigma_o)^2 d\ell\} \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

であり，σ_oは降伏応力である．　不等式(19)は，Parisら(1979年)がJ－R曲線から導いたティアリングモジュラスによる安定条件となっている．

参考文献

(1)Niiseki,S., New General Fracture Criterion for Heterogeneous Materials, Fracture Toughness and Fracture Energy, ed. by H. Mihashi, et al., Balkema, 1989, pp.101-116
(2)新関 茂，非平衡熱力学を基礎とする破壊力学の構築，第39応用力学連合講演会講演予講集，1989，pp.85-86