I-109　異種材料を接合した薄板の曲げ問題の解析

名古屋工業大学　学生員　茂籠　勇人
名古屋工業大学　正員　長谷部　宣男
名古屋工業大学　正員　中村　卓次

まえがき　ここでは二つの異種材料の接合部が直線、それ以外は接合部に関して対称な任意の形状を考え、有理関数と複素応力関数を用い薄板の曲げの混合境界値問題の解を誘導する。そして接合線に対称な二つの異種材料半無限板が有限長で接合され、無限遠で曲げを受ける問題の解法を示す。

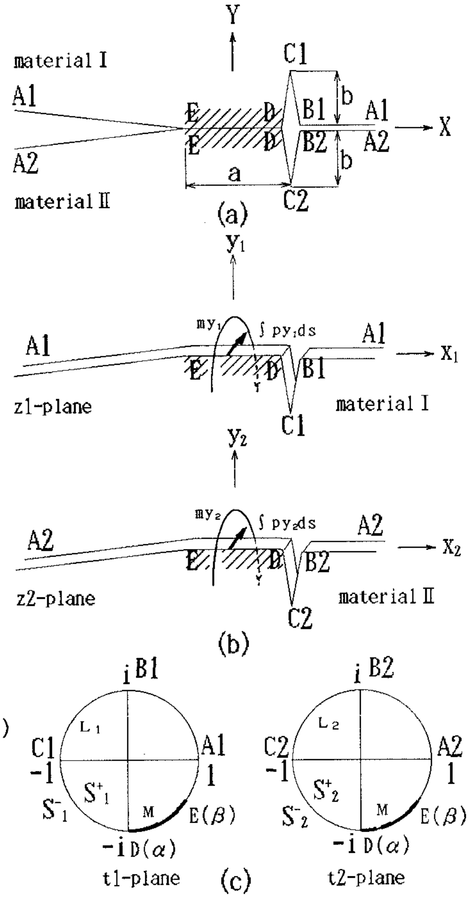

図1

Riemann-Hilbert問題への定式化　物理面を表す図１(a)においてY≧0の半平面を材料Ｉ、Y≦0の半平面を材料IIと呼ぶことにする。材料ＩをX軸に関して対称変換すれば材料Ｉ，IIの形状は一致する。よって、z_1, z_2平面からt_1, t_2平面への写像関数は同一のものを使用することができる。ここでは次式の写像関数を用いる。

$$z_j=\omega(t_j)=\frac{E_0}{1-t_j}+\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k}{\zeta_k-t_j}+E_c \tag{1}$$

ただしj=1,2で添字は材料Ｉ，IIを表し、N=24である。図１(a)、図１(b)の境界で接合部をM境界、それ以外をL_j境界と呼ぶ。M境界で応力、変位が連続であることにより次の関係を得る。

$$\begin{array}{llll} MY_1=-my_1 & \int PY_1ds=\int py_1ds & \dfrac{\partial W}{\partial Y_1}=\dfrac{\partial w}{\partial y_1} & \dfrac{\partial W}{\partial X_1}=-\dfrac{\partial w}{\partial x_1} \\ MY_2=\ my_2 & \int PY_2ds=\int py_2ds & \dfrac{\partial W}{\partial Y_2}=\dfrac{\partial w}{\partial y_2} & \dfrac{\partial W}{\partial X_2}=\dfrac{\partial w}{\partial x_2} \end{array} \tag{2}$$

また、外力が作用していない境界が存在する場合には、解析接続より$\phi_j(t_j)$は次式のように求まる。

$$\psi_j(t_j)=\kappa_j\overline{\phi_j}(1/t_j)-\frac{\overline{\omega}(1/t_j)}{\omega'(t_j)}\phi'_j(t_j) \tag{3}$$

外力，変位の境界条件式はそれぞれ次式で表される。

$$-\kappa_j\phi_j(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'_j(\sigma)}+\overline{\psi_j(\sigma)}=\frac{1}{D_j(1-\nu_j)}\int[my_j+i\int py_jds]dz \tag{4}$$

$$\phi_j(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'_j(\sigma)}+\overline{\psi_j(\sigma)}=\frac{\partial w}{\partial x_j}+i\frac{\partial w}{\partial y_j} \tag{5}$$

D_jは曲げ剛性、κ_jはﾎﾟｱｿﾝ比の関数で$(3+\nu_j)/(1-\nu_j)$で表される。L_j上で二つの外力成分m_{yj}, $\int p_{yj}ds$を与える境界条件式はt_1, t_2平面で独立に与えられる。(3),(4)から$\phi j(tj)$を消去して次式で表される。

$$\phi^+_j(\sigma)-\phi^-_j(\sigma)=-\frac{1}{\kappa_jD_j(1-\nu_j)}\int[my_j+i\int py_jds]dz=h_{1L}(\sigma) \tag{6}$$

ただし、領域Sの内部から境界上に近ずいた値に+外部から境界上に近ずいた値に−の肩符を付している。M上では(4),(5)を利用することにより次式を得る。

$$\phi^{+}_{1}(\sigma)+\lambda_{1}\phi^{-}_{1}(\sigma)=\gamma_{1}g_{1}(\sigma)+h_{1M}(\sigma)$$

$$\lambda_{1}=\frac{\kappa_{1}D_{1}(1-\nu_{1})+\kappa_{1}\kappa_{2}D_{2}(1-\nu_{2})}{\kappa_{1}\kappa_{2}D_{1}(1-\nu_{1})+\kappa_{2}D_{2}(1-\nu_{2})}\qquad \gamma_{1}=\frac{(1+\kappa_{2})\kappa_{1}D_{1}(1-\nu_{1})}{\kappa_{2}D_{2}(1-\nu_{2})+\kappa_{1}\kappa_{2}D_{1}(1-\nu_{1})} \tag{7}$$

ただし$g^{+}_{1}(\sigma)=g^{-}_{1}(\sigma)=g_{1}(\sigma)$となる任意の有理関数である。

一般解の誘導　境界条件式が(6),(7)与えられるRiemann-Hilbert問題の一般解は

$$\phi_{1}(t_{1})=H_{1}(t_{1})+\frac{\gamma_{1}\chi_{1}(t_{1})}{2\pi i}\int_{M}\frac{g_{1}(\sigma)\,d\sigma}{\chi^{+}_{1}(\sigma)(\sigma-t_{1})}+\chi_{1}(t_{1})P_{1}(t_{1}) \tag{8}$$

$$H_{1}(t_{1})=H_{1L}(t_{1})+H_{1M}(t_{1}) \tag{9}$$

$$\chi_{1}(t_{1})=(t_{1}-\alpha)^{m_{1}}(t_{1}-\beta)^{1-m_{1}}$$

$$m_{1}=0.5+i\frac{\ln\lambda_{1}}{2\pi} \tag{10}$$

$\chi_{1}(t_{1})$はPlemelj関数であり、α,βは境界L_{j}とM境界との接続点D,Eに対応する。$P_{1}(t_{1})$は任意の有理関であり$\phi_{1}(t_{1})$のS^{+}での正則条件より次式で与えられる。

$$P_{1}(t_{1})=\frac{1}{\kappa_{1}}\sum_{k=1}^{N}\frac{\overline{A_{1k}}B_{k}}{\chi_{1}(\zeta_{k})(\zeta_{k}-t_{1})} \tag{11}$$

ここで$A_{1k}=\phi'_{1}(\zeta'_{k}),\ B_{k}=E_{k}/\overline{\omega'(\zeta'_{k})},\ \zeta'_{k}=1/\overline{\zeta_{k}}$

$g_{1}(t_{1})$は領域内外でそれぞれ正則な項に分解し、さらに２位以上の極および正則項が最終的に零となることを考え、結局$g_{1}(t_{1})$は次式のように表すことができる。

$$g_{1}(t_{1})=\frac{1}{\kappa_{1}}\sum_{k=1}^{N}\frac{\overline{A_{1k}}B_{k}}{\zeta_{k}-t_{1}}-\frac{1}{\kappa_{2}}\frac{\kappa_{2}D_{2}(1-\nu_{2})}{\kappa_{1}D_{1}(1-\nu_{1})}\sum_{k=1}^{N}\frac{A_{1k}\overline{B_{k}}(\zeta'_{k})^{2}}{\zeta'_{k}-t_{1}} \tag{12}$$

荷重条件として無限遠点で曲げが作用して、それ以外のL_{j}上には外力の作用しない状態を考える。よって(9)の第２項は零、第１項は次式で示される。

$$H_{1L}(t_{1})=\frac{\chi_{1}(t_{1})}{2\pi i}\frac{-M_{0}}{\kappa_{1}D_{1}(1-\nu_{1})}\int_{L}\frac{d\sigma}{\chi^{+}_{1}(\sigma)(\sigma-t_{1})} \tag{13}$$

以上より最終的に複素応力関数$\phi_{1}(t_{1})$は次のように求められる。

$$\begin{aligned}\phi_{1}(t_{1})=&H_{1L}(t_{1})+\frac{1}{\kappa_{1}}\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{\gamma_{1}}{1+\kappa_{2}}+\left(1-\frac{\gamma_{1}}{1+\kappa_{2}}\right)\frac{\chi_{1}(t_{1})}{\chi_{1}(\zeta_{k})}\right\}\frac{\overline{A_{1k}}B_{k}}{\zeta_{k}-t_{1}}\\&+\frac{1}{\kappa_{2}}\frac{\kappa_{2}D_{2}(1-\nu_{2})}{\kappa_{1}D_{1}(1-\nu_{1})}\frac{\gamma_{1}}{1+\kappa_{2}}\sum_{k=1}^{N}\left\{1-\frac{\chi_{1}(t_{1})}{\chi_{1}(\zeta'_{k})}\right\}\frac{A_{1k}\overline{B_{k}}(\zeta'_{k})^{2}}{\zeta'_{k}-t_{1}}\end{aligned} \tag{14}$$

Dundursの定義したﾊﾟﾗﾒｰﾀｰ　解析を容易にするために上で求めた一般解を平面問題でDundursの定義したﾊﾟﾗﾒｰﾀｰに相当する以下のもの用いる。

$$\alpha_{D}=\frac{(\kappa_{2}+1)\Gamma-(\kappa_{1}+1)}{(\kappa_{2}+1)\Gamma+(\kappa_{1}+1)}\qquad \beta_{D}=\frac{(\kappa_{2}-1)\Gamma-(\kappa_{1}-1)}{(\kappa_{2}+1)\Gamma+(\kappa_{1}+1)}$$

$$\Gamma=\frac{\kappa_{1}D_{1}(1-\nu_{1})}{\kappa_{2}D_{2}(1-\nu_{2})} \tag{15}$$

$$\lambda_{1}=\frac{1-\beta_{D}}{1+\beta_{D}}\quad \lambda_{2}=\frac{1+\beta_{D}}{1-\beta_{D}}\quad \gamma_{1}=\frac{1+\alpha_{D}}{1+\beta_{D}}\quad \gamma_{2}=\frac{1-\alpha_{D}}{1-\beta_{D}}$$

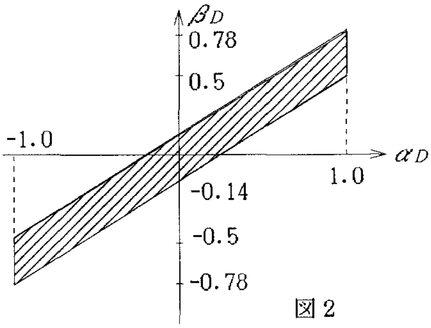

図２

α_{D},β_{D}の取り得る範囲は図２に示す。ここでは対象としている形状が接合線に関して対称なので$\alpha D\leqq 0$について考えればよい。また図２の$\alpha_{D}=\beta_{D}=0$の原点は材料Ｉ，IIが同一の材料の場合である。