

東海大学海洋学部 正 員 北原 道弘

### 1. はじめに

構造部材の表面に存在するクラックの傾きと深さを知ろうとする場合の1つの有力な手法は、超音波法であろう。超音波は弾性固体内を伝播するとき、弾性波となる。ここでは、部材裏面に表面クラックが存在する場合を想定し、表面からの弾性波のピッチ・キャッチ法により、クラックからの後方散乱場を吟味することにより、表面クラックを特徴付けることを考える。このために、表面クラックによる波動の散乱問題を解析する一手法、ここでは積分方程式法、を示し解析と実験例について述べる。

### 2. 基本関係式

定常状態における2次元弾性体の運動方程式は次のように書ける。

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho\omega^2 u_\alpha = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (1)$$

また、応力と変位の関係式は次のようである。

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda\delta_{\alpha\beta}u_{\gamma,\gamma} + \mu(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad (2)$$

半無限境界  $\Gamma_s$  とクラックの上下面  $\Gamma_c^\pm$  では応力零とする。

$$t_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}n_\beta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_c^+ + \Gamma_c^-) \quad (3)$$

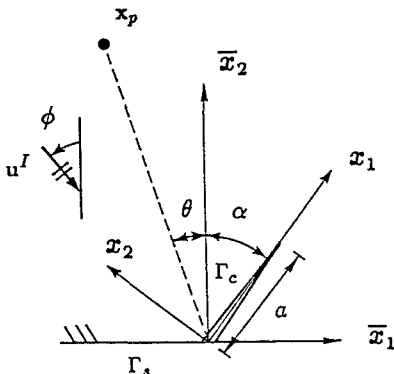


Fig.1 Crack configuration

いま、全変位場  $u_\alpha$  を入射波  $u_\alpha^I$  と散乱波  $u_\alpha^{sc}$  の和として表すとき、

$$u_\alpha = u_\alpha^I + u_\alpha^{sc}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^I + \sigma_{\alpha\beta}^{sc} \quad (4)$$

散乱波は無限遠で放射条件を、全変位場はクラック端の条件を満足するものとする。

### 3. 積分方程式

Fig.1 に示すクラック座標  $(x_1, x_2)$  において、散乱場の積分表現は次のようになる。

$$u_\gamma^{sc}(\mathbf{x}_p) = \int_{\Gamma_s} \sigma_{\alpha\beta\gamma}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) u_\alpha^{sc} n_\beta ds(\mathbf{x}) + \int_0^a \sigma_{\alpha 2\gamma}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) \Delta u_\alpha(\mathbf{x}) dx_1, \quad \mathbf{x}_p \notin \Gamma \quad (5)$$

ここに、 $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^G$  はクラックのない無限体中の応力に関するグリーン関数であり、 $\Delta u_\alpha = u_\alpha^+ - u_\alpha^-$  はクラックの開口変位、 $a$  はクラックの長さである。

上式 (5) と表面力の表現

$$t_\alpha^{sc} = \sigma_{\alpha\beta}^{sc} n_\beta|_{x_p} \quad (6)$$

より、表面力の積分表現を得る。

$$t_\alpha^{sc}(\mathbf{x}_p) = -n_\beta(\mathbf{x}_p) \left\{ \int_{\Gamma_s} K_{\alpha\beta\delta\epsilon}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) u_\delta^{sc} n_\epsilon ds + \int_0^a K_{\alpha\beta\delta 2}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) \Delta u_\delta(\mathbf{x}) dx_1 \right\}, \quad \mathbf{x}_p \notin \Gamma \quad (7)$$

ここに  $K_{\alpha\beta\delta\epsilon}^G$  は次のようであり、微分は点  $\mathbf{x}$  に関する微分である。

$$K_{\alpha\beta\delta\epsilon}^G = \lambda\delta_{\alpha\beta}\sigma_{\delta\epsilon\gamma,\gamma}^G + \mu(\sigma_{\delta\epsilon\alpha,\beta}^G + \sigma_{\delta\epsilon\beta,\alpha}^G) \quad (8)$$

式 (7) で極限  $x_p \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$  を取り、境界条件 (3) を用いれば、解くべき積分方程式を得るが、このとき積分核は超特異核となる。そこで、ここでは極限を取る前に次の操作をする。式 (7) の表現において、半無限境界  $\Gamma_s$  を  $N_1$  個に、クラック表面  $\Gamma_c$  を  $N_2$  個に分割する。このとき、 $\mathbf{x}_p \notin \Gamma$  に対し、式 (7) の右辺第1項は、ある一つの要素上で次のように変形できる(第2項についても同様)。

$$\begin{aligned} \int_{S_j}^{S_{j+1}} K_{\alpha\beta\delta\epsilon}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) u_{\delta}^{*c}(\mathbf{x}) n_{\epsilon} ds &= H_{\alpha\beta\delta}^1(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) u_{\delta}^{*c}(\mathbf{x})|_{s_j}^{s_{j+1}} \\ &- \int_{S_j}^{S_{j+1}} H_{\alpha\beta\delta}^1(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) \varepsilon_{\lambda\mu} u_{\delta}^{*c}(\mathbf{x}) n_{\mu} ds \\ &- \rho\omega^2 \int_{S_j}^{S_{j+1}} H_{\alpha\beta\delta}^2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) u_{\delta}^{*c}(\mathbf{x}) ds \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、 $H_{\alpha\beta\delta}^{1,2}$ は次のようであり、

$$H_{\alpha\beta\delta}^1 = \lambda\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\epsilon}\sigma_{\delta\epsilon\gamma}^G + \mu(\varepsilon_{\beta\epsilon}\sigma_{\delta\epsilon\alpha}^G + \varepsilon_{\alpha\epsilon}\sigma_{\delta\epsilon\beta}^G)$$

$$H_{\alpha\beta\delta}^2 = \lambda\delta_{\alpha\beta}u_{\delta\gamma}^G n_{\gamma} + \mu(u_{\delta\alpha}^G n_{\beta} + u_{\delta\beta}^G n_{\alpha}) \quad (10)$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}$  は2次元の置換記号である。式(9)の表現において、特異要素上では極限を取る前に解析的に積分を実行しておくことにする。この操作の後に、極限  $\mathbf{x}_p \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$  を取り、境界条件 (3) :

$$\begin{aligned} t_{\alpha}^I(\mathbf{x}_p^i) + t_{\alpha}^{*c}(\mathbf{x}_p^i) &= 0, \quad \mathbf{x}_p^i \in \Gamma, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ (N = N_1 + N_2) \end{aligned} \quad (11)$$

を用いて、解くべき積分方程式系を得る。なお、数値解析上、クラック端では次のクラック要素を導入している。

$$\Delta u_{\delta} = C_{\delta}(a - x_1)^{1/2} \quad (12)$$

#### 4. 散乱場の積分表現

非破壊評価においては、一般にクラック端から遠い点での散乱場が必要となる。式(5)の積分表現は実際上、半無限境界  $\Gamma_S$  の取り方に依存する。遠方散乱場の  $\Gamma_S$  への依存性を除き、解析精度をクラック表面  $\Gamma_c$  上だけで保証すればよいように、次の処置をとる。式(7)-(12)を用いて境界上の諸量を決めた後の散乱場の表現には、半無限境界上の境界条件を満足する半無限体のグリーン関数  $\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}^G$  を用いる。

$$u_{\gamma}^{*c}(\bar{\mathbf{x}}_p) = \int_{\Gamma_c^+} \bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}^G(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{x}}_p) \Delta u_{\alpha}(\bar{\mathbf{x}}) \bar{n}_{\beta} ds \quad (13)$$

$\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}^G$  に関する詳細は省略する。

#### 5. 解析と実験概要

Fig. 2 に横波(TV)を入射角  $45^\circ$  で送り、クラックの傾き  $\alpha$  を変化させたときの散乱場を示す。 $\alpha = 45^\circ$  では  $|u_1^{*c}|$  成分が大きいたことがわかる。実験では、固体(スチール)内で横波(TV)にモード変換するように、水中から超音波(縦L波)を発信し、同じ探触子で散乱波をキャッチした(Fig. 3)。解析と実験値の比較をFig. 4に示す。探触子の中心周波数は5MHz、クラック深さは  $a=0.79\text{mm}$  である。

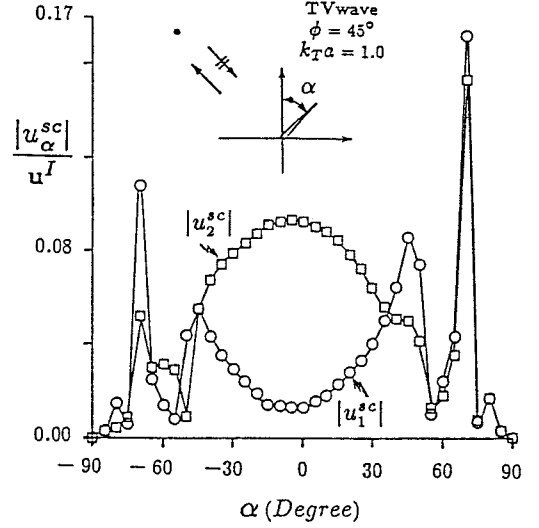


Fig.2 Backscattered displacements vs. angle of crack

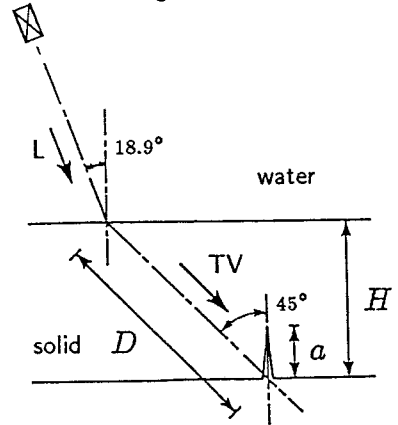


Fig.3 Mode converted TV-wave

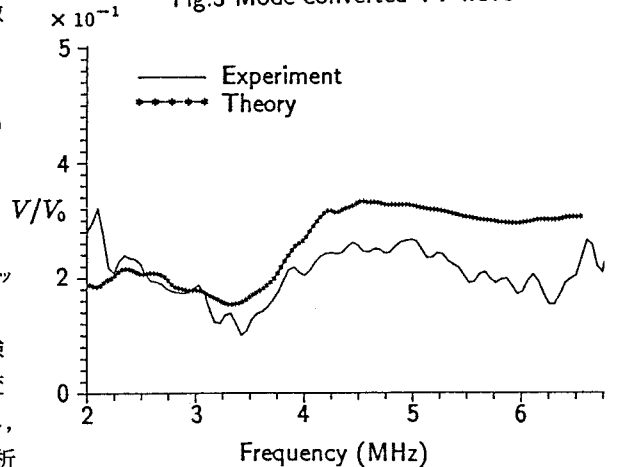


Fig.4 Backscattered signal from surface breaking crack (0.79 mm crack)