I-91　境界積分方程式法による非線形地盤反力を考慮した弾性床上はりの応力解析

岩手大学工学部　正　員　出戸　秀明
岩手大学工学部　正　員　岩崎　正二
岩手大学工学部　正　員　宮本　裕

1．は じ め に

弾性地盤反力を非線形に仮定した場合、この問題の支配方程式は非線形の微分方程式となり、解析的に解くことはできない。この種の問題の解法には、相似則を用いたいわゆる港研方式と、差分法や有限要素法によって数値的に解く方法がある。[1)]　本論文ではこの非線形微分方程式の解法として、はりの静的曲げ問題の基本解を用いた境界積分方程式法を適用し、この解法が有効であることを確かめた。

2．解 析 理 論

地盤係数の変化する弾性床上のはりに分布荷重 $q(x)$ が作用するときの支配方程式は、地盤反力の非線形性を考慮する非線形弾性地盤反力法では、式(1)のような非線形微分方程式となる。

$$EI\frac{d^4w(x)}{dx^4}+k(x)w^m(x)=q(x)\qquad(0<m<1)\tag{1}$$

本論文においては上式の m について港研方式を採用し、$m=0.5$ とした。

また、はりの静的曲げ問題の基本解は 式(2)で定義され、式(3)で表される。

$$EI\frac{d^4w_0^*(x,y)}{dx^4}=\delta(x-y)\qquad\delta:\text{デルタ関数}\tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{ll}w_0^*(x,y)=(2^3+r^3-3\ell r)/12EI, & M_0^*(x,y)=-(r-2\ell)/2,\\ \theta_0^*(x,y)=r(r-2\ell)/4EI\cdot\mathrm{sgn}(x-y), & Q_0^*(x,y)=-1/2\cdot\mathrm{sgn}(x-y).\\ \text{ただし、}r=|x-y|,\ x>y\text{ のとき }\mathrm{sgn}(x-y)=1,\ x<y\text{ のとき }\mathrm{sgn}(x-y)=-1 & \end{array}\right]\tag{3}$$

式(1)の両辺にはりの基本解 $w_0^*(x,y)$ をかけスパン ℓ にわたって積分し、$w(x)$ の微係数がとれるまで部分積分を繰り返し、デルタ関数の性質を考慮すれば 式(4)が得られる。

$$w(y)=\Big[Q(x)w_0^*(x,y)-M(x)\theta_0^*(x,y)+\theta(x)M_0^*(x,y)-w(x)Q_0^*(x,y)\Big]_{x=0}^{x=\ell}$$
$$+\int_0^\ell q(x)w_0^*(x,y)\,dx-\int_0^\ell k(x)w^{0.5}(x)w_0^*(x,y)\,dx\tag{4}$$

ただし、$\theta(x)=\dfrac{dw(x)}{dx}$,　$M(x)=-EI\dfrac{d^2w(x)}{dx^2}$,　$Q(x)=-EI\dfrac{d^3w(x)}{dx^3}$,

$\theta_0^*(x,y)=\dfrac{dw_0^*(x,y)}{dx}$,　$M_0^*(x,y)=-EI\dfrac{d^2w_0^*(x,y)}{dx^2}$,　$Q_0^*(x,y)=-EI\dfrac{d^3w_0^*(x,y)}{dx^3}$

スパン ℓ を n 分割とし、たわみを Gauss の積分公式により近似すると、式(4)右辺最後の積分項は、次のように表される。

$$G(y_j)=C_{j\cdot1}w_1^{0.5}+C_{j\cdot2}w_2^{0.5}+C_{j\cdot3}w_3^{0.5}+\cdots+C_{j\cdot2n+1}w_{2n+1}^{0.5}\qquad(j=1,2,3,\cdots,2n+1)$$

ただし、$w_1\sim w_{2n+1}$ は分割点（境界点も含む）でのたわみ。

これより式(4)は分割点（境界点も含む）j での式として表わされ，次の２ｎ＋１本の式が得られる。

$$\begin{aligned}w_j=&A_{j\cdot1}Q(\ell)+A_{j\cdot2}M(\ell)+A_{j\cdot3}\theta(\ell)+A_{j\cdot4}w(\ell)\\&+B_{j\cdot1}Q(0)+B_{j\cdot2}M(0)+B_{j\cdot3}\theta(0)+B_{j\cdot4}w(0)+q_j\\&-(C_{j\cdot1}w_1^{0.5}+C_{j\cdot2}w_2^{0.5}+C_{j\cdot3}w_3^{0.5}+\cdots+C_{j\cdot2n+1}w_{2n+1}^{0.5})\qquad(j=1,2,3,\cdots,2n+1)\end{aligned}$$

ただし、$A_{j\cdot n}$，$B_{j\cdot n}$ は分割点における式の境界量にかかる係数で基本解より定まる。q_j は荷重項。また、$w(0)=w_1$，$w(\ell)=w_{2n+1}$ である。

これら２ｎ＋１本の式に、式(4)を y について微分した式より導かれる境界における２本の式を加え、マ

トリックス式に直し整理して 式(5)を得る。

$$[\,G\,,\,H\,]\{\,w_1^{0.5}, w_2^{0.5}, w_3^{0.5}, \cdots, w_{2n+1}^{0.5}, Q(\ell), M(\ell), \theta(\ell), Q(0), M(0), \theta(0)\,\}^T = -\{\,q_1, q_2, q_3, \cdots, q_{2n+3}\,\}^T \qquad (5)$$

ここで、Gは $w_1^{0.5} \sim w_{2n+1}^{0.5}$にかかる係数行列、Hは境界量にかかる係数行列であるが、このとき係数行列Gの中には未知量である$w_1^{0.5} \sim w_{2n+1}^{0.5}$を含んでいる。

式(5)の未知量のうち境界条件より定まる４個の境界量を除いた後、係数行列中の未知量$w_1^{0.5} \sim w_{2n+1}^{0.5}$に初期値を与え収束するまで繰り返し計算をすることにより残りの未知量を求めることができる。

3．数 値 解 析 例

数値計算は等分布荷重の作用する単純支持の弾性床上のはりで、k(x)が一定の場合を取り扱った。

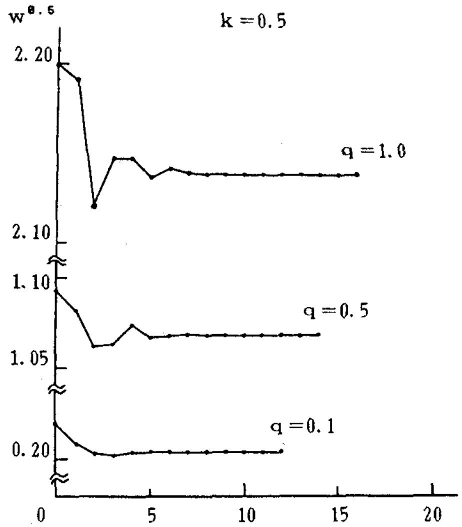
非線形解を反復法で求めるに際して収束速度を向上させることを目的に、得られた近似解にαの重みを持たせ、またそのひとつ前のステップで得られた近似解に$1-\alpha$の重みを持たせ、両者を加えたものを次の近似解とする手法をとった。

用いた数値は以下のとおりである。

$\ell = 10.0$(m), $EI = 1.0$(t·m²), $q = 1.0$(t/m),

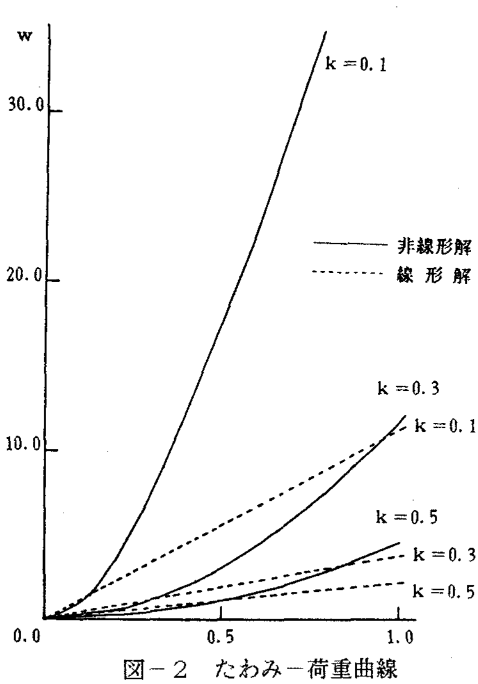
$k = 0.5$(t/m$^{1.5}$), $n = 10$: 分割数, $\alpha = 0.8$.

単位長さ当りの荷重qを 0.1, 0.5, 1.0t/m と変化させたときの反復法による解の収束のようすを、はり中央点のたわみについて示したのが 図－１ である。



図－１　反復回数による解の収束状況

図－２は、はり中央点の たわみ－荷重曲線 を示したものであり、線形解と境界積分方程式法による非線形解を比較したものである。地盤係数を小さくすると非線形解は線形解に比べてかなり大きな値となることがわかる。



図－２　たわみ－荷重曲線

4．お わ り に

地盤反力の非線形性を考慮した弾性床上はりの応力問題に対する境界積分方程式法による近似解法を提案し解析を行なった結果、この手法が非線形問題に十分適用できる手法であることがわかった。

最後になりましたが、この研究を始めるにあたって、東北大学工学部教授柳沢栄司先生にご助言を頂きましたことをここに感謝致します。

参 考 文 献

1)杭基礎の設計法とその解説，土質工学会；1985

2)出戸秀明·宮本 裕·岩崎正二:境界積分方程式によるはりの解法，岩手大学工学部研究報告第36巻；1983

3)出戸秀明·宮本 裕·岩崎正二:境界要素法による弾性床上のはりの解析，土木学会東北支部技術研究発表会講演概要；1986