I-89 境界要素近似解の誤差推定値の精度改善に関する一検討

新潟大学工学部 正員 阿部和久
新 潟 県 正員 中川 渉

1．はじめに　これまで著者らは直接法に基づく積分方程式を境界要素法により離散化近似した場合を対象に、要素自動分割法および節点境界値の誤差推定法について検討を行なって来た[1]。その結果、各節点における近似境界値の有する誤差を具体的に評価することがある程度可能であることが確かめられた。しかし、問題によっては誤差の推定が必ずしも良好に行なわれていない場合も認められた。そこで節点境界値の誤差推定法に焦点を絞り、その改善策を検討することとした。

2．誤差推定の定式化　ここでは二次元ポテンシャル問題について考え、一定要素を例に議論する。

二次元ポテンシャル問題における境界値uおよび流束qの境界要素近似解をそれぞれ$\tilde{u}$, $\tilde{q}$とし、境界積分方程式に代入して選点法を適用し、未知量に関する項を左辺に、既知量に関する項を右辺に移項すれば、最終的に次の連立方程式を得る。

$$[A]\{x\}=\{b\} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに、［**A**］は係数行列であり、｛**x**｝は未知境界値ベクトル、｛**b**｝は既知境界値から作成されるベクトルである。

一方、近似解｛**x**｝＝｛$\tilde{u}$, $\tilde{q}$｝における誤差｛$\hat{\mathbf{E}}$｝＝｛$\hat{E}_u$, $\hat{E}_q$｝に対しては次の方程式を得る。

$$[A]\{\hat{E}\}=\{R\}\ ,\ R_i=-\int_\Gamma q^*(x_i,y)(u-\hat{u})\,d\Gamma_y+\int_\Gamma u^*(x_i,y)(q-\hat{q})\,d\Gamma_y \quad \cdots(2)$$

ここに、u^*, q^*は基本解であり、$\hat{u}$, $\hat{q}$は、真の解u, qを$\tilde{u}$, $\tilde{q}$と同様の方法で補間して得られる関数である。

式(2)において｛**R**｝が適当な方法で評価されれば、誤差｛$\hat{\mathbf{E}}$｝を推定することが可能となる。

3．Rの評価および誤差の推定　式(2)より、R_iの評価は各要素上での$u-\hat{u}$, $q-\hat{q}$の評価に帰着することとなる。そこで、これまでは隣接する二要素間で近似値の差分をとり、以下のように評価してきた。

$$u-\hat{u}\fallingdotseq \left.\frac{du}{ds}\right|_i s \fallingdotseq \frac{\Delta\tilde{u}}{\Delta s}s\ ,\ q-\hat{q}\fallingdotseq \left.\frac{dq}{ds}\right|_i s \fallingdotseq \frac{\Delta\tilde{q}}{\Delta s}s \quad \cdots\cdots(3)$$

式(3)による評価には主に2つの問題点があげられる。すなわち、$u-\hat{u}$, $q-\hat{q}$を要素上で一次近似することが不十分な場合があり得ること、および、真の解の微分値を本来誤差を含んでいる近似値の差分で評価することである。以上の点を改善する目的で以下に示す手順により$u-\hat{u}$, $q-\hat{q}$の二次補間を用い誤差を評価することとした。

まず、境界値f（uまたはq）は境界Γ上で区間連続であるものとし、今着目している要素Γ_i上の節点iを含む連続した3つの節点を用いてfの二次関数による補間$\hat{\hat{f}}$を与え、fの代わりに用いれば次式を得る。

$$f-\hat{f}\fallingdotseq\hat{\hat{f}}-\hat{f}=\sum_k \psi_k^i(s)f_k \quad (f_k=f(x_k)) \quad \cdots\cdots(4)$$

ここに、kについての和は節点iを含む連続した3節点に対してとるものとし、ψ_k^iは適当な二次の補間関数とする。

式(4)より、残差R_iの近似$\hat{\hat{R}}_i$を次式のように評価することとする。

$$\hat{\hat{R}}_i=-\sum_j^{Ne}\left(\sum_k\int_{\Gamma_k}q^*\psi_j^k\,d\Gamma\right)u_j+\sum_j^{Ne}\left(\sum_k\int_{\Gamma_k}u^*\psi_j^k\,d\Gamma\right)q_j \quad \cdots\cdots(5)$$

ただし、N_eは全要素数であり、kについての和は$\psi_j^k\neq 0$なる要素kについてのみとるものとする。

式(5)より$\hat{\hat{R}}$を求めるためには各節点における真の境界値u_i, q_iが与えられている必要があるので、式

(5)を直接用いることは不可能である。そこで、真の境界値を近似値と誤差とに分け、式(5)をさらに次のように書き替える。

$$\hat{\tilde{R}}_i = \tilde{R}_i - \sum_j^{Ne} \left(\sum_k \int_{\Gamma_k} q^* \psi_j^k \, d\Gamma \right) \hat{E}_{uj} + \sum_j^{Ne} \left(\sum_k \int_{\Gamma_k} u^* \psi_j^k \, d\Gamma \right) \hat{E}_{qj} \qquad \cdots\cdots(6\cdot a)$$

$$\tilde{R}_i = -\sum_j^{Ne} \left(\sum_k \int_{\Gamma_k} q^* \psi_j^k \, d\Gamma \right) \tilde{u}_j + \sum_j^{Ne} \left(\sum_k \int_{\Gamma_k} u^* \psi_j^k \, d\Gamma \right) \tilde{q}_j \qquad \cdots\cdots(6\cdot b)$$

ただし、式(6·a)の右辺第2,3項での総和は、各境界値がそれぞれ未知な節点に対してとるものとする。なお、$\tilde{R}_i$は近似解$\tilde{u}_j$, $\tilde{q}_j$より求めることができる。式(2)の残差R_iの代わりに式(6·a)を用い、誤差に関する項を左辺に移項すれば、最終的に誤差$\{\hat{E}\}$に対して次式を得る。

$$[\bar{A}]\{\hat{E}\} = \{\hat{\tilde{R}}\} \qquad \cdots\cdots(7\cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{ij} &= a_{ij} + \sum_k \int_{\Gamma_k} q^* \psi_j^k \, d\Gamma \\ \text{or} &= a_{ij} - \sum_k \int_{\Gamma_k} u^* \psi_j^k \, d\Gamma \end{aligned} \right\} \qquad \cdots\cdots(7\cdot b)$$

ただし、係数成分$\bar{a}_{ij}$は節点ｊでｕが未知な場合は第１式で、ｑが未知な場合には第２式で与えられるものとする。節点誤差は式(7·a)を解くことにより評価することとする。

４．解析例　前節に示した方法でどの程度誤差評価が改善され得るのかを確認する目的で、図-1に示す問題を例に各辺８等分割の離散化に対し誤差推定を行なった。y=1, x=0の各辺上の節点近似値に対する真の誤差と、推定値とを図-2(a),(b)に示す。なお、図-2には、式(7·a)による推定結果(Case1)の他に、式(2)においてＲの代わりに(6·b)の$\tilde{R}$を用いたもの(Case2)および、式(3)により$u-\tilde{u}$, $q-\tilde{q}$を評価した従来の方法によるもの(Case3)を合わせて示した。y=1の辺では(1,1)に接する要素節点でCase3が最も良好な結果を与えているが、その他の点ではCase1によりほぼ十分な誤差評価が行なわれていることがわかる。また、ｕが未知な辺(x=0)においては、Case3による推定値は全体に真の誤差から離れており、一方、近似値の二次補間により評価を行なったCase2では概ね真の誤差と一致した値を示している。このことから境界値を要素上線形で評価したCase3はx=0の辺上の誤差に対し不十分であることがわかる。また、Case2ではかどの要素で多少真の値から離れた結果となっているが、Case1を用いることにより、この点も改善されている。

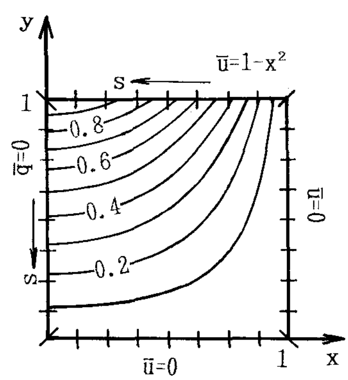

図-1　解析例

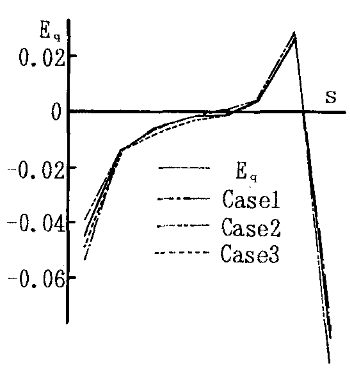

図-2(a)　誤差分布(y=1)

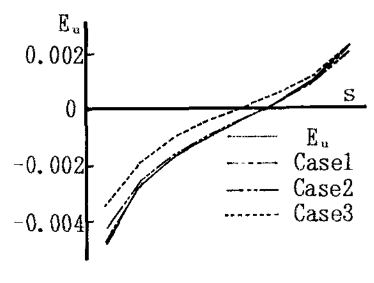

図-2(b)　誤差分布(x=0)

〈参考文献〉1)中川・阿部：ｈ法による二次元弾性問題境界要素法自動分割に関する一考察，土木学会第44回年次学術講演会　1989年