土木学会第45回年次学術講演会（平成２年９月）

I-84

面内回転自由度を持つ膜要素に関する一考察

東京電機大学　　井浦雅司

1　はじめに

シェル構造物を平板要素と膜要素を用いて有限要素解析することはよく行なわれており、文献［１］にも詳しくその方法が述べられている。その際に、６番目の自由度として、面内回転自由度を付加する方法が多用されており、それに関する剛性の評価方法が多くの研究者により議論されている。文献［１］では仮想剛性の考え方が示されている。一方、吉田［２］らは要素辺上の変位を３次関数で仮定し、Allmann ［３］はそれを２次関数で仮定し、それぞれ節点回転角を含んだ変位関数を誘導している。これらの研究に対して、Iura［４］はLagrangeの定数法を用いて面内回転角を変位とは別の自由度として有する汎関数を誘導している。以上の研究は対称な応力のみを用いたものであり、これに対してHughesとBrezzi［５］，井浦とAtluri［６］らは非対称な応力を導入することにより面内回転自由度を有する膜要素の開発を行なっている。

ここでは、まず応力の対称性を仮定せずに、すなわち、モーメントに関する平衡条件式がEuler-Lagarange の方程式とし得えられるような汎関数を導く。これは基本的には文献［５］と同一の汎関数となり、反対称な応力に関する構成方程式に正のパラメータが含まれる。文献［５］ではこのパラメータについて詳細な検討がなされておらず、曖昧な表現となっている。本報告の目的は、このパラメータの取りえる範囲を、２次形式の楕円性条件より求め、その値が大きくなり過ぎると楕円性条件が成立しなくなること示すことにある。

2　汎関数

準備として、ここで必要となる記号を導入するが、詳細は文献「５」を参照されたい。ベクトル$\underline{a}$に対して、gradを次のように定義する：grad $\underline{a}=[a_{i,j}]$ 。２階のテンソルＡに対して symm と skew を次のように定義する： $\mathrm{symm}\,\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{A}^{T})/2$，　$\mathrm{skew}\,\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{A}^{T})/2$。境界上で零となり、その１階導関数までが積分可能な関数の空間をＶとおく。また、対称成分が零となり、積分可能な成分からなる２階のテンソルの空間をＷとおく。ここで対象とする境界値問題は、境界で変位が拘束されている線形平面問題とする。平衡方程式は、応力テンソル$\underset{\sim}{\sigma}$と物体力ベクトル$\underline{f}$により、

$$\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\sigma}+\underline{f}=0,\qquad \mathrm{skew}\,\underset{\sim}{\sigma}=0 \tag{1}$$

となる。これに対応する弱形式は、任意の$\underline{v}\in V$，$\underset{\sim}{\omega}\in W$をそれぞれ重み関数として、

$$-\int\underline{v}\cdot(\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\sigma}+\underline{f})\,d\Omega-\int\underset{\sim}{\omega}^{T}\cdot\mathrm{skew}\,\underset{\sim}{\sigma}\,d\Omega=0 \tag{2}$$

となる。部分積分を施して上式を書き直すと次式を得る。

$$\int\mathrm{symm\,grad}\,\underline{v}\cdot\mathrm{symm}\,\underset{\sim}{\sigma}\,d\Omega+\int(\mathrm{skew\,grad}\,\underline{v}-\underset{\sim}{\omega})^{t}\cdot\mathrm{skew}\,\underset{\sim}{\sigma}\,d\Omega-\int\underline{v}\cdot\underline{f}\,d\Omega=0 \tag{3}$$

構成則は、 symm $\underset{\sim}{\sigma}$とskew $\underset{\sim}{\sigma}$ に共役な歪テンソルを用いることとし、以下の形に仮定する。

$$\mathrm{symm}\,\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{C}\cdot\mathrm{symm\,grad}\,\underline{v},\quad \mathrm{skew}\,\underset{\sim}{\sigma}=\gamma\,(\mathrm{skew\,grad}\,\underline{v}-\underset{\sim}{\omega}) \tag{4a,b}$$

ここに、$\underset{\sim}{C}$は４階の弾性テンソルで、γは正の定数である。式（４）を用いて変位成分で表示された弱形式は、$\gamma>0$であれば式（２）と等価となるが、$\gamma=0$の時は平衡方程式(1b)が満たされなくなることに注意を要する。さて、式 (3)、(4) をもとにして、以下の汎関数を考える。

$$U(\underline{v},\underset{\sim}{\omega})=1/2\int(\mathrm{symm\,grad}\,\underline{v})\cdot\underset{\sim}{C}\cdot(\mathrm{symm\,grad}\,\underline{v})\,d\Omega$$
$$+\gamma/2\int(\mathrm{skew\,grad}\,\underline{v}-\underset{\sim}{\omega})^{t}\cdot(\mathrm{skew\,grad}\,\underline{v}-\underset{\sim}{\omega})\,d\Omega+\int\underline{v}\cdot\underline{f}\,d\Omega \tag{5}$$

汎関数Ｕの停留値問題として得られるEuler-Lagrange の方程式は変位表示による平衡方程式(1)と一

致する。

3　パラメターγ

さて次の変分問題を考える：任意の$\underline{v}$，$\underset{\sim}{\omega}$に対して次式を満たす$\underline{u}\in V$，$\underset{\sim}{\phi}\in W$を求める。

$$B(\underline{u},\ \underset{\sim}{\phi};\ \underline{v},\ \underset{\sim}{\omega}) = f(\{\underline{v},\ \underset{\sim}{\omega}\})$$

$$B(\underline{u},\ \underset{\sim}{\phi};\ \underline{v},\ \underset{\sim}{\omega}) = \int (\mathrm{symm\ grad}\ \underline{v})\cdot\underset{\sim}{C}\cdot(\mathrm{symm\ grad}\ \underline{u})\, d\Omega + \gamma\int(\mathrm{skew\ grad}\ \underline{v}-\underset{\sim}{\omega})^{t}\cdot(\mathrm{skew\ grad}\ \underline{u}-\underset{\sim}{\phi})\, d\Omega \quad (6a,b)$$

ここで、２次形式Ｂが有界でかつ楕円性条件を満たすならば、上記の解は存在し、近似解の誤差評価も得られる。２次形式Ｂが任意のγに対して有界であることは容易に示されるのに対して、楕円性条件はγの値に依存する。

まず以下のノルムを定義する。$\underline{v}\in V$，$\underset{\sim}{\omega}\in W$に対して

$$\|\underline{v}\|^2=\int|\mathrm{grad}\ \underline{v}|^2\, d\Omega、\quad \|\underset{\sim}{\omega}\|^2=\int|\underset{\sim}{\omega}|^2\, d\Omega、\quad \|\{\underline{v},\ \underset{\sim}{\omega}\}\|^2=\|\underline{v}\|^2+\|\underset{\sim}{\omega}\|^2 \quad (7a\text{-}c)$$

さらにζを以下のようにおく［５］。

$$2\zeta = \min\ \underset{\sim}{\varepsilon}\cdot\underset{\sim}{C}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}/|\underset{\sim}{\varepsilon}|^2、\quad \underset{\sim}{\varepsilon}=\underset{\sim}{\varepsilon}^{T},\ \underset{\sim}{\varepsilon}\neq 0 \quad (8)$$

また、Kornの不等式より次式を満たす定数C_Kが存在する。

$$\|\mathrm{symm\ grad}\ \underline{v}\|^2 \geq C_K\,\|\mathrm{grad}\ \underline{v}\|^2 \quad (9)$$

以上の記号を用いることにより、以下の不等式が導かれる。

$$B(\underline{v},\ \underset{\sim}{\omega};\ \underline{v},\ \underset{\sim}{\omega}) \geq 2\zeta\,\|\mathrm{symm\ grad}\ \underline{v}\|^2 + \gamma\,\|\mathrm{skew\ grad}\ \underline{v}-\underset{\sim}{\omega}\|^2 \quad (10)$$

更に、上式の右辺をかき直すと

$$B(\underline{v},\ \underset{\sim}{\omega};\ \underline{v},\ \underset{\sim}{\omega}) \geq \{2\zeta C_K-\gamma(1-C_K)\}\,\|\mathrm{grad}\ \underline{v}\|^2+\gamma/2\,\|\underset{\sim}{\omega}\|^2 + \gamma\{(1-C_K)\,\|\mathrm{grad}\ \underline{v}\|^2-\|\mathrm{skew\ grad}\ \underline{v}\|^2\} \quad (11)$$

となる。ここで、Kornの不等式より、

$$(1-C_K)\,\|\mathrm{grad}\ \underline{v}\|^2-\|\mathrm{skew\ grad}\ \underline{v}\|^2 \geq 0 \quad (12)$$

となることから、$\gamma>0$に対し以下の不等式を得る。

$$B(\underline{v},\ \omega;\ \underline{v},\ \omega) \geq \beta\,\|\mathrm{grad}\ \underline{v}\|^2+\gamma/2\,\|\underset{\sim}{\omega}\|^2、\quad \beta=\{2\zeta C_K-\gamma(1-C_K)\} \quad (13)$$

ここで、$\beta>0$ならば、

$$B(\underline{v},\ \underset{\sim}{\omega};\ \underline{v},\ \underset{\sim}{\omega}) \geq \eta\,\|\{\underline{v},\underset{\sim}{\omega}\}\|^2 \quad (14)$$

となる$\eta=\mathrm{Min}\{\beta、\gamma/2\}$が存在し、楕円性条件が満たされる。

ここで、$\beta>0$、$\gamma>0$を用いると、以下の不等式を得る。

$$0<\gamma<2\zeta C_K/(1-C_K) \quad (15)$$

これがγの取りえる範囲であり、これ以外の値では楕円性条件が成立しなくなる。

4　おわりに

本報告は、基本的に文献［５］と同一の手法を用いているが、２次形式の楕円性条件に関して異なった評価式を導くとともに、パラメータγについても新たな評価式を与えた。なお、有限要素解の精度と式(15)の評価式とは別の問題であり、実際に要求される精度については今後更に研究が必要となるであろう。

5　参考文献

[1] Zienkiewicz : The Finite Element Method, McGraw-Hill.
[2] 吉田・雨宮・増田：土木学会論文報告集、No.211, 1973.
[3] Allman : Computers and Structures, 19, No.1-2, 1984.
[4] Iura ：土木学会論文報告集、No.416/I-13, 1990.
[5] Hughes and Brezi : Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 72, 1989.
[6] 井浦・Atluri ：構造工学論文集、Vol.36A, 1990.