

I-82 固定辺を持つ長方形厚板の曲げ解析

北見工業大学大学院 学生員 渡辺 午一
北見工業大学 正 員 奥村 勇

1. まえがき 本研究は、板の上面中央に部分分布荷重を受ける長方形厚板の曲げを解析するものである。境界条件は、相対する2辺が単純支持、他の2辺が固定の場合を考えている。解析方法は、改良されたLoveの理論を用いている。荷重条件を満たす特殊解には、3次元弾性解の一部を用い、同次解には、平面応力解と一般化平面応力解を用いている。Loveの理論では、曲げに関する境界条件が二つしか規定できないが、改良されたLoveの理論では、通常の厚板理論に見られるように、三つ規定できるようになっている。

2. 同次解 図-1に示した長方形厚板が、 $x=0$ 及び $y=0$ に関して対称な荷重を受けているとすると、平面応力解の変位成分は、次式となる。

$$u = \frac{1}{E} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \sin \alpha_r x \left[(1+\nu) P_r^{(1)} \cosh \alpha_r y + P_r^{(3)} \{ 2 - \nu \cdot (\alpha_r z)^2 \} \cosh \alpha_r y + (1+\nu) \alpha_r y \sinh \alpha_r y \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$v = -\frac{1}{E} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \sin \alpha_r x \left[(1+\nu) P_r^{(1)} \sinh \alpha_r y - P_r^{(3)} \{ 1 - \nu + \nu \cdot (\alpha_r z)^2 \} \sinh \alpha_r y - (1+\nu) \alpha_r y \cosh \alpha_r y \right] \dots\dots\dots (2)$$

$$w = -\frac{2\nu}{E} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^2 P_r^{(3)} \cos \alpha_r x \cosh \alpha_r y \dots\dots\dots (3)$$

また、一般化平面応力解の変位成分を示すと、次のとおりである。

$$u = \frac{1+\nu}{E} z \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \sin \alpha_r x \left[Q_r^{(1)} \cosh \alpha_r y + Q_r^{(3)} \{ \alpha_r y \sinh \alpha_r y - \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} (\alpha_r z)^2 \cosh \alpha_r y \} \right] \dots\dots\dots (4)$$

$$v = -\frac{1+\nu}{E} z \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \cos \alpha_r x \left[Q_r^{(1)} \sinh \alpha_r y + Q_r^{(3)} \{ \alpha_r y \cosh \alpha_r y + \{ 1 - \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} (\alpha_r z)^2 \} \sinh \alpha_r y \} \right] \dots\dots\dots (5)$$

$$w = \frac{1+\nu}{E} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \cos \alpha_r x \left[Q_r^{(1)} \cosh \alpha_r y + Q_r^{(3)} \{ \alpha_r y \sinh \alpha_r y - \frac{(\alpha_r h)^2}{2(1-\nu)} \{ 1 - 2\nu \left(\frac{z}{h} \right)^2 \} \cosh \alpha_r y \} \right] \dots\dots\dots (6)$$

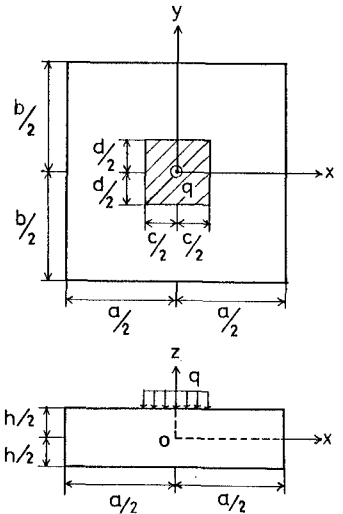


図-1 長方形厚板の座標系

3. 特殊解 特殊解として、一般化された Boussinesq の解を用いると、次のとおりである。

$$2Gu = \text{grad}(\phi_0 + r \cdot \lambda) - 4(1-\nu)\lambda + 2\text{rot} \mathfrak{A} \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{ここで、} u=(u,v,w), r=(x,y,z), \lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \mathfrak{A}=(0,0,\mathfrak{A}_3) \dots\dots\dots (8 \cdot a \sim d)$$

$$\nabla^2 \phi_0 = 0, \nabla^2 \lambda = 0, \nabla^2 \mathfrak{A} = 0 \dots\dots\dots (9 \cdot a \sim c)$$

応力性状が $x=0$ 及び $y=0$ に関して対称であることに留意して、上式より変位ポテンシャルを求めると、次のとおりである。

$$\phi_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (C_{rs}^{(1)} \cosh n_{rs} z + \overline{C}_{rs}^{(1)} \sinh n_{rs} z) \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

$$\lambda_3 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (C_{rs}^{(2)} \sinh n_{rs} z + \overline{C}_{rs}^{(2)} \cosh n_{rs} z) \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

$$\mathfrak{A}_3 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \alpha_r x \sin \beta_s y (C_{rs}^{(3)} \cosh n_{rs} z + \overline{C}_{rs}^{(3)} \sinh n_{rs} z) + \sin \lambda_k z \sum_{r=1}^{\infty} E_r^{(1)} \sin \alpha_r x \sinh m_{kr} y \dots\dots\dots (10 \cdot c)$$

ここで、 $\alpha_r = r\pi/a$ ($r=1,3,\dots$), $\beta_s = s\pi/b$ ($s=1,3,\dots$), $\lambda_k = k\pi/h$ ($k=1,3,\dots$), $n_{rs} = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_s^2}$;
 $m_{kr} = \sqrt{\alpha_r^2 + \lambda_k^2}$ (11・a~e)

4. 荷重条件及び境界条件 図-1に示した場合の荷重条件は、次式となる。

$$z = h/2 \text{ において、} \sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = -p(x, y) \quad \dots\dots (12 \cdot a)$$

$$z = -h/2 \text{ において、} \sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = 0 \quad \dots\dots (12 \cdot b)$$

ここで、

$$p(x, y) = \begin{cases} q [|x| < c/2 \text{ かつ } |y| < d/2] \\ 0 [\text{上記以外の領域}] \end{cases} \quad (13)$$

また、境界条件は、 $x = \pm a/2$ の2辺が単純支持、 $y = \pm b/2$ の2辺が固定の場合を考えると、次のとおりである。

$$x = \pm a/2 \text{ において、} v = 0, T_{xx} = 0, w = 0, M_x = 0, \partial v / \partial z = 0$$

$$y = \pm b/2 \text{ において、} u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 0; \quad \dots\dots (14 \cdot a \sim e)$$

$$(\partial u / \partial z)_{z=0} = 0, (\partial v / \partial z)_{z=0} \quad \dots\dots (15 \cdot a \sim e)$$

ここで、式(14・b,d)における T_{xx} 及び M_x は、それぞれ、合応力及び合モーメントである。式(14・a~e)の境界条件は、自明に満足される。特殊解に式(12・a,b)の荷重条件を課すると、未定定数 $C_{rs}^{(1)}, C_{rs}^{(2)}, C_{rs}^{(3)}$, $\overline{C}_{rs}^{(1)}, \overline{C}_{rs}^{(2)}$ 及び $\overline{C}_{rs}^{(3)}$ が求められる。特殊解及び同次解に式(15・a~e)の境界条件を課すると、未定定数 $P_1^1, P_1^2, Q_1^1, Q_1^2$ 及び E_1^1 が求められる。

5. 数値計算例 計算例として、 $b/a=1.0$ の正方形厚板が、 $c/a=d/b=0.3$ の正方形分布荷重を受け、ポアソン比 $\nu=0.3$ の場合を取扱った。板厚比 $e=h/a$ は、種々値を変えて計算した。図-2には、 σ_{xx} の $x=0$ 及び $y=0$ における板厚方向の分布を示した。 $e=1/4$ の場合には、直線分布からの隔たりが著しいが、 $e=1/8$ の場合には、ほぼ直線分布になっている。図-3には、 σ_{yy} の $x=0$ 及び $y=0$ における板厚方向の分布を示した。 $e=1/4$ の場合には、 σ_{xx} と同様に直線分布からの隔たりが著しく、その値は σ_{xx} に較べて小さい。 $e=1/8$ の場合には、圧縮側でわずかに凸、引張側で凹の曲線を示しているが、ほぼ直線分布になっている。図-4には、 σ_{zx} の $x=0.15a$ 及び $y=0$ における分布を示した。 $e=1/8$ の場合には、板の中央面に関してほぼ対称な放物線に近づき、薄板理論による解析結果と同じ傾向を示している。

6. あとがき 本報告では、特殊解として一般化された Boussinesqの解を用い、同次解として、Loveの理論の平面応力解・一般化平面応力解を用いた改良されたLoveの理論により、板の上面中央に部分分布荷重を受ける長方形厚板の曲げを解析した。長方形厚板の解析は、従来、周辺単純支持が多く取扱われているが、固定辺を持つ長方形厚板も力学的に重要と思われる。固定辺の境界条件の規定の仕方は、厚板理論と薄板理論とは異なり、その相違が板の変位及び応力にいかん影響するかは、興味あるテーマである。本研究で報告した長方形厚板の解析結果と薄板理論による解析結果との比較は、講演会当日に報告し、固定辺を持つ平板の薄板理論の適用性について吟味する。

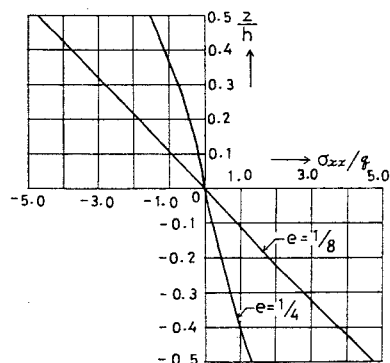


図-2 σ_{xx} の板厚方向における分布 ($x=y=0, e=h/a$)

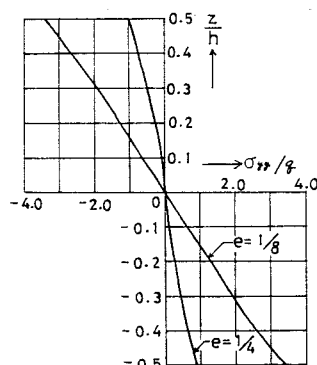


図-3 σ_{yy} の板厚方向における分布 ($x=y=0, e=h/a$)

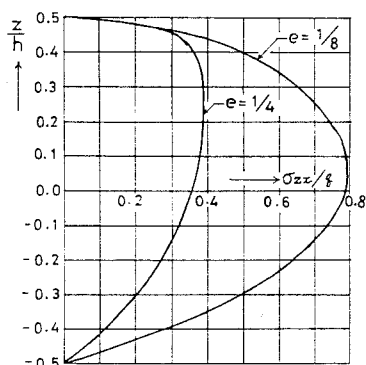


図-4 σ_{zx} の板厚方向における分布 ($x=0.15a, y=0, e=h/a$)