I-81　　正方形板の剛性行列のブロック対角化

長岡技術科学大学　学生員○有尾一郎
長岡技術科学大学　正会員　池田清宏
長岡技術科学大学　正会員　鳥居邦夫

１．まえがき

対称な系の支配方程式が、適当な座標変換により、幾つかの独立な方程式に分離できるという原理は、量子力学（量子化学）の分野では一般的に用いられている。これに反し、構造力学では、対称構造物の解析にあたり、対称性を必ずしも体系的に記述していない。最近、文献[1)]では対称トラス構造物の支配方程式をブロック対角化する手法を提案している。この手法は、構造解析の分野で不得意であった並列処理を可能とするものである。

本研究ではこの手法を(対称な)正方形板の構造解析に適用する。この場合のつりあい方程式は直交行列である座標変換行列により、６個の独立した式に分解できる。非対称な外力が作用する場合の解も、この分解した式の解の組み合わせで表わす事ができるので、対称条件を取り扱う従来の手法よりも汎用性がある。

２．正方形板のブロック対角化

図１に示すような正方形板のつりあい方程式を

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \qquad (1)$$

とする。ここで、断面特性、材料特性は均一と仮定する。また変数は $\mathbf{f}$＝外力ベクトル、$\mathbf{u}$＝変形ベクトル、$\mathbf{K}$＝剛性行列である。

この正方形板は図１中のｘ，ｙ，ｓ－ｓ，ｔ－ｔ軸に関して線対称であり、また、原点周りの９０度の回転に関して点対称である。このような対称性を持つ式(1)は、以下に示す対称座標系 $\hat{\mathbf{u}}$ に座標変換すると６個の独立な式に分かれることが知られている。

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{u}}, \qquad \hat{\mathbf{u}} = [\,\hat{\mathbf{u}}_1, \cdots, \hat{\mathbf{u}}_6] \qquad (2.a, b)$$

$$\mathbf{H} = [\,\mathbf{h}_1, \ \cdots, \ \mathbf{h}_6] \qquad (3)$$

ここで、$\mathbf{h}_i$（文献[1)]の公式を参照）は各々次に示す変形パターンを表わす基底ベクトルからなる行列であり、

（１）$\mathbf{h}_1$：４軸対称(x, y, s-s, t-t軸)
（２）$\mathbf{h}_2$：90度の回転対称
（３）$\mathbf{h}_3$：２軸対称(x, y軸)
（４）$\mathbf{h}_4$：２軸対称(s-s, t-t軸)
（５）$\mathbf{h}_5$：ｘ軸対称
（６）$\mathbf{h}_6$：ｙ軸対称

という対称性を持つ。

また、これらの行列を求めるにあたり、正方形板の各節点を図２のような４タイプの対称要素（８角形、ひし形、正方形および中央節点）に分けて考えた。例として、これらのタイプのうちひし形タイプに対応する変形パターンを図３に示す。

式(2)により式(1)は、

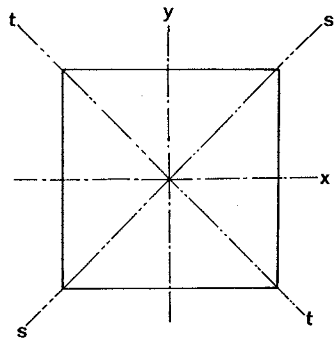


図１　正方形板の対称軸

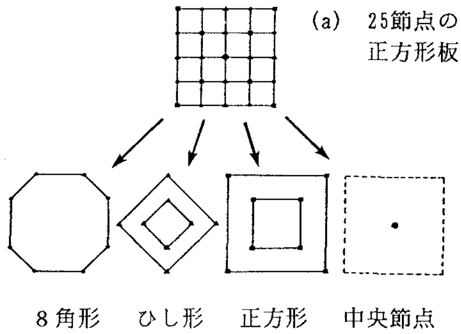


図２　25節点の正方形板の節点の分類

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^t\cdot\mathbf{f} \\ \mathbf{h}_2^t\cdot\mathbf{f} \\ \mathbf{h}_3^t\cdot\mathbf{f} \\ \mathbf{h}_4^t\cdot\mathbf{f} \\ \mathbf{h}_5^t\cdot\mathbf{f} \\ \mathbf{h}_6^t\cdot\mathbf{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_1 & & & & & 0 \\ & \hat{\mathbf{K}}_2 & & & & \\ & & \hat{\mathbf{K}}_3 & & & \\ & & & \hat{\mathbf{K}}_4 & & \\ & & & & \hat{\mathbf{K}}_5 & \\ 0 & & & & & \hat{\mathbf{K}}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \hat{\mathbf{u}}_3 \\ \hat{\mathbf{u}}_4 \\ \hat{\mathbf{u}}_5 \\ \hat{\mathbf{u}}_6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

と変換できる。ここで、

$$\hat{\mathbf{K}}_i = \mathbf{h}_i^t\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{h}_i \qquad (i=1\sim6) \qquad (5)$$

この変換した式(4)は、以下に示す６つの独立な式と等価である。

$$\mathbf{h}_i^t\cdot\mathbf{f} = \hat{\mathbf{K}}_i\cdot\hat{\mathbf{u}}_i \qquad (i=1\sim6) \qquad (6)$$

したがって、各ブロックの解は、

$$\hat{\mathbf{u}}_i = [\hat{\mathbf{K}}_i]^{-1}\cdot(\mathbf{h}_i^t\cdot\mathbf{f}) \qquad (i=1\sim6) \qquad (7)$$

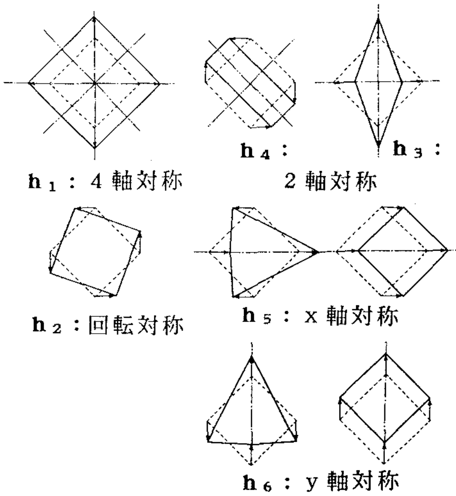
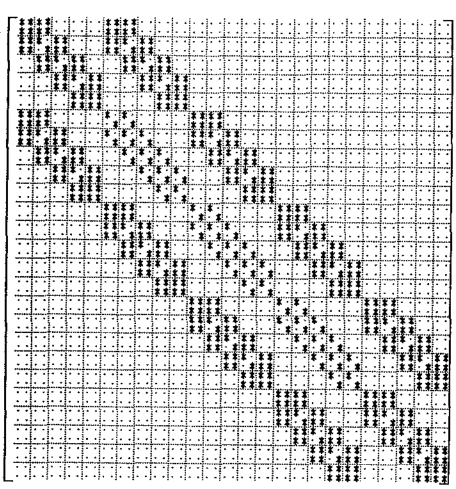


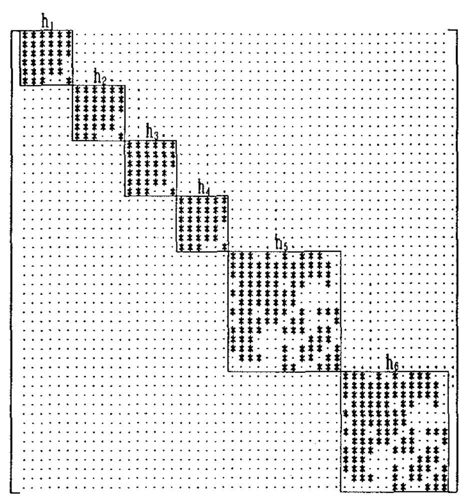
図３　ひし形タイプの変形パターン

となる。この解を式(2)よりデカルト座標系に再変換し、重ね合わせることにより式(1)の解が求まる。
　このように、外力ベクトル**f**が非対称な場合にも幾何学的な対称条件による式の簡略化を行えることが本手法の特長である。

３．計算結果

図２-(a)のような正方形板(4×4の正方形要素)の剛性行列**K**は図４のように帯行列となる。この帯行列**K**を上記の方法により座標変換すると、図５のように６個のブロック（$\mathbf{h}_1$, …, $\mathbf{h}_6$）に分かれた。この時の座標変換行列は各節点に対応した全タイプ（図２-(b)）の対称変形パターンベクトルからなる行列である。そして、個々のブロック毎に対称座標系の解を求め、式(2)により再変換し、デカルト座標系の解を求めた。この解は式(1)を直接解いた解と、当然ながら一致することを確認した。





ここで、　＊＝non-zero成分，・＝zero成分

図４　25節点の正方形板の剛性行列　　　　図５　ブロック対角化した剛性行列

４．参考文献

1) K. Ikeda and K. Murota, Bifurcation Analysis of axisymmetric Structures Using Block-Diagonalization, 1989
2) O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Methord Third Edition, 1977