土木学会第45回年次学術講演会（平成２年９月）

I-80　対称構造系の臨界初期不整の決定法

東京大学　正会員　○室田一雄
長岡技術科学大学　正会員　池田清宏

1　はじめに

球殻シェル，円筒シェルのように幾何学的対称性をもつ構造物の耐荷力は初期不整に対して非常に敏感であり，その設計においては耐荷力を最も急激に減少させるような初期不整 (臨界不整) を知ることが望ましい．最近，著者によって単純特異点における臨界不整が決定された [1]．しかし，対称構造物においてはその対称性の故に一般的状況において多重特異点が生じるので，その手法は十分でない．本研究では，対称構造物の初期不整を解析するための一般的枠組みを与え，特に軸対称構造物に対する臨界不整の決定法の概略を報告する．群表現論を用いた詳しい数学的議論については [2] を参照されたい．

2　理論

載荷 f を受ける構造物の釣合い方程式を

$$H(f,u,v)=0 \tag{1}$$

とする．ここで，f は荷重パラメタ，u は節点変位 N 次元ベクトル，v は初期不整 p 次元ベクトル，H は十分滑らかな非線形関数とする．各初期不整 v に対する耐荷力は釣合い式 (1) と接線剛性行列 $J=J(f,u,v)=(\partial H_i/\partial u_j)$ の特異性条件 $\det J=0$ とから定められる．

完全系を $v=v^0$ とし，初期不整の大きさ (強度) ε とモード (パターン) d を区別して $v=v^0+\varepsilon d$ と表わす (上付き添字 0 は完全系の値を表す)．ただし，不整モード $d\in\mathbf{R}^p$ は適当な重み行列 W によって

$$d^{\mathrm{T}}Wd=1 \tag{2}$$

と正規化されているとする．ε が小さいとき，耐荷力の変化量 $\hat{f}_{\mathrm{c}}$ は

$$\hat{f}_{\mathrm{c}}\sim -C(d)\,\varepsilon^{\rho} \tag{3}$$

と表される．ここで指数 ρ は完全系の特異点 $(f_{\mathrm{c}}^0,u_{\mathrm{c}}^0)$ のタイプによって定まり (下付き添字 c は特異点での値を表す)，$C(d)$ は不整モード d に依存する．正規化条件 (2) の下で $|C(d)|$ を最大にする不整モード $d=d^*$ を臨界不整と呼ぶ．

対称構造物の初期不整解析の枠組み [2] は次の通りである．構造物の対称性は，数学的にはある群 G に対する方程式 (1) の G 共変性

$$T(g)H(f,u,v)=H(f,T(g)u,S(g)v),\ g\in G,$$

として表される．ここで，$T(g)$ と $S(g)$ は群 G のユニタリ表現行列である．　完全系と特異点 $(f_{\mathrm{c}}^0,u_{\mathrm{c}}^0)$ が G 対称であることは

$$\Sigma(v^0;G,S)=\Sigma(u_{\mathrm{c}}^0;G,T)=G$$

と表わされる．ただし，一般にベクトルの集合 U に対して，

$$\Sigma(U;G,T)=\{g\in G\mid T(g)u=u,\ \forall u\in U\}$$

はその対称性の群を表す．さらに重み行列の G 不変性 $S(g)WS(g)^{\mathrm{T}}=W,\quad g\in G$, を要請する．

以上の枠組みで対称構造物の臨界不整を解析することができる．このとき，(1) の G 共変性の帰結として，不整感度行列 ($N\times p$ 行列)

$$B=\left(\partial H_i/\partial v_j|_{(f,u,v)=(f_{\mathrm{c}}^0,u_{\mathrm{c}}^0,v^0)}\right)$$

が $T(g)B=BS(g),\ g\in G$, のように G と交換することが重要である．

軸対称構造物では $G=D_n$(正 n 角形の対称性を表す二面体群) であり，現実に生じる特異点は単純点 (荷重の極大点，対称分岐点) か二重分岐点であるとしていい．すなわち，特異点における接線剛性行列 $J^0=J(f_{\mathrm{c}}^0,u_{\mathrm{c}}^0,v^0)$ の零空間 $\ker J^0$ の次元 M は 1 または 2 である．ξ_i (1 $\le$

$i \leq M$) を $\ker(J^0)^{\mathrm{T}}$ の正規直交基底とし，P を $\ker(J^0)^{\mathrm{T}}$ への正射影行列とする．二重分岐点において，$\Sigma(\ker J^0; D_n, T)$ はある巡回群 C_m ($2\pi/m$ の回転に関する不変性を表す群) に等しい．

不整による耐荷力の変化 (3) について次の結論が得られる．

定理: 軸対称構造物について

1．極大点では $\rho = 1$; 単純分岐点では $\rho = 2/3$; 二重分岐点では $n/m \geq 4$ なら $\rho = 2/3$, $n/m = 3$ なら $\rho = 1/2$ である．

2．係数 $C(d)$ は PBd によって (単純特異点あるいは $n/m \geq 5$ である二重分岐点では $||PBd||$ によって) 定まる．

3．臨界不整 d^* は，単純点においては

$$
\begin{aligned}
d^* &= -W^{-1}B^{\mathrm{T}}\xi_1/\alpha_1,\\
\alpha_1 &= ({\xi_1}^{\mathrm{T}}BW^{-1}B^{\mathrm{T}}\xi_1)^{1/2};
\end{aligned}
$$

二重分岐点においては，ある φ によって

$$
\begin{aligned}
d^* &= \cos\varphi\cdot d^{(1)} + \sin\varphi\cdot d^{(2)},\\
d^{(i)} &= -W^{-1}B^{\mathrm{T}}\xi_i/\alpha_2, \quad i = 1,2,\\
\alpha_2 &= ({\xi_i}^{\mathrm{T}}BW^{-1}B^{\mathrm{T}}\xi_i)^{1/2}, \quad i = 1,2,
\end{aligned}
$$

と表わされる ($n/m \geq 5$ なら φ は任意でよい)．

4．臨界不整 d^* は接線剛性行列 J^0 の零空間より高い対称性をもつ:

$$\Sigma(d^*; D_n, S) \supseteq \Sigma(\ker J^0; D_n, T).$$

さらに，単純点においては等号が成立する．　□

3　適用例

図１に示す６角形トラス ($n = 6$) が垂直荷重を受けたときの耐荷力は二重分岐点 ($m = 1$) で決定される．各部材の断面積 A_i を不整パラメタにとり $v = (A_1, \cdots, A_6)^{\mathrm{T}}$ とする．これは完全系では $v^0 = (A, \cdots, A)^{\mathrm{T}}$ に等しい．$W = \mathrm{diag}\,(1, \cdots, 1)/A^2$ とすると

$$
\begin{aligned}
d^{(1)} &= (-2, -1, 1, 2, 1, -1)^{\mathrm{T}}\cdot A/\sqrt{12},\\
d^{(2)} &= (0, -1, -1, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}\cdot A/2
\end{aligned}
$$

と計算される．図２に $d^{(1)}$, $d^{(2)}$, および任意に選んだ不整モード $d^{(3)}$ に対する不整強度 ($\varepsilon^{2/3}$) と耐荷力 ($\hat{f}_c$) の相関図 (数値解析結果) を示す．それぞれ異なった傾きの直線関係は関係式 (3) を裏付けている．$d^{(1)}$ と $d^{(2)}$ に対する直線がランダムな不整に対する耐荷力 (•) の下側包絡線になっており，本手法の妥当性を示している．

参考文献

[1] K. Ikeda and K. Murota: Critical initial imperfection of structures, to appear in *Int. J. of Solids and Structures*, 1990.

[2] K. Murota and K. Ikeda: Critical imperfection of symmetric structures, METR 90-03, Dept. Math. Engin. Infor. Phys., Univ. Tokyo, 1990.

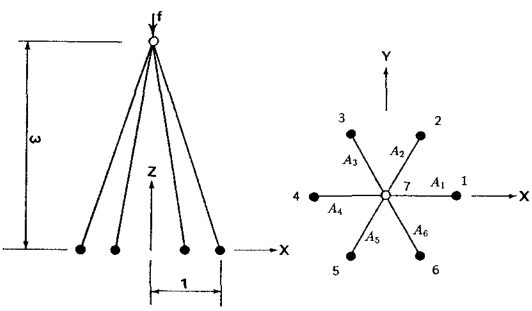

Fig. 1　Regular-hexagonal 6-bar truss tent (D_6-equivariant)
(○): free node
(•): fixed node

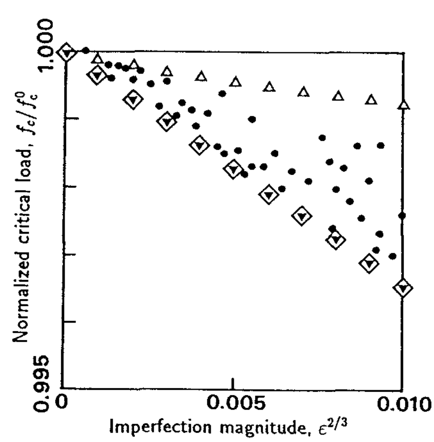

Fig. 2　Load-bearing capacity versus imperfection magnitude ($f_c/f_c^0 - \varepsilon^{2/3}$) relation of the regular-hexagonal truss tent
(▼): critical imperfection mode $d^{(1)}$
(◇): critical imperfection mode $d^{(2)}$
(△): randomly chosen mode $d^{(3)}$
(•): randomly chosen imperfection