I-79　有限要素法による動的大変形解析の収束性改善策に関する試み

東京工業大学　正員　吉田　裕
東京工業大学　学生員　原田　恒樹

１．はじめに　有限要素法による動的大変形解析法の収束性改善の一方策として、周期の長い低次の成分に対しては高い精度を有し、実際の現象にはほとんど影響しないが、数値解析的には大きな影響を及ぼすことになる高次の成分に対しては振幅を減衰させるような特性の有する時間積分法の採用を考えることができる。このような特性を有する時間積分法としてＨｉｌｂｅｒ－Ｈｕｇｈｅｓ－Ｔａｙｌｏｒ法[1]（以下Ｈ－Ｈ－Ｔ法と書く）がよく用いられるが、変位増分を変数とした収束計算を基礎とする非線形方程式に直接この積分法を適用することは難しい。ここでは、変位増分を変数として接線剛性マトリックスと不つり合い力とで構成される構造大変形解析のアルゴリズムに、慣性項および減衰項を考慮し、直接時間積分法としてＨ－Ｈ－Ｔ法をやや変則的な形で採用して動的大変形解析過程を構成し、得られた解法の特性を数値解析によって比較検討した結果を報告する。

２．Ｈ－Ｈ－Ｔ法の概要　［Ｍ］（質量行列）、［Ｋ］（剛性行列）、｛ｆ｝（外力ﾍﾞｸﾄﾙ）、｛ｕ｝（変位ﾍﾞｸﾄﾙ）、$\{\ddot{u}\}$（加速度ﾍﾞｸﾄﾙ）より成る減衰項のない運動方程式は式(1)のように与えられる。

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{f\} \tag{1}$$

Ｈ－Ｈ－Ｔ法はパラメータαを導入して式(1)を式(2)のように書き改め、Ｎｅｗｍａｒｋ－β法の公式より得られる式(3)、式(4)に基づいて構成される積分漸化公式である。

$$[M]\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\}+(1+\alpha)[K]\{u_{t+\Delta t}\}-\alpha[K]\{u_t\}=\{f_{t+\Delta t}\} \tag{2}$$

$$\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\}=\frac{1}{\beta\Delta t^2}\{u_{t+\Delta t}\}-\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\{u_t\}+\frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{u}_t\}+\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\{\ddot{u}_t\}\right] \tag{3}$$

$$\{\dot{u}_{t+\Delta t}\}=\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{u_{t+\Delta t}\}-\left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{u_t\}-\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\{\dot{u}_t\}-\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\{\ddot{u}_t\}\right] \tag{4}$$

特性評価に基づいてパラメータβ，γはαによって　$\beta=(1-\alpha)^2/4$，$\gamma=1/2-\alpha$として与えられる。線形問題では無条件に安定であり、パラメータαによって数値的な減衰を与える周波領域をコントロールすることが可能である。

３．Ｈ－Ｈ－Ｔ法の非線形有限要素方程式への適用　ここで対象としている動的大変形解析のための有限要素方程式は式(5)のようなものである。

$$[K_T]\{\Delta u\}=\{f_{<t+\Delta t>}\}-\{f_{int<t>}\}-[M]\{\ddot{u}_{<t+\Delta t>}\}-[C]\{\dot{u}_{<t+\Delta t>}\} \tag{5}$$

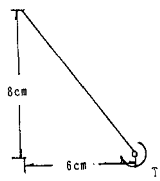
ここで、$[K_T]$（接線剛性行列）、$\{\Delta u\}$（変位増分ﾍﾞｸﾄﾙ）、［Ｃ］（減衰行列）、$\{f_{int}\}$（内部節点力ﾍﾞｸﾄﾙ）である。

前述したように式(2)の意味を曲げずに式(5)にＨ－Ｈ－Ｔ法を直接適用することは難しい。ここでは、Ｎｅｗｔｏｎ－Ｒａｐｈｓｏｎ法による収束計算過程における第＜ｊ－１＞近似と第＜ｊ＞近似との関係にパラメータαを導入した式(6)のような関係式を提案する。α＝０．０のときは式(5)と一致する。

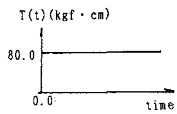
$$\begin{aligned}&(1+\alpha)[K_T]\{\Delta u_{<j>}\}\\&=\{f_{<t+\Delta t>}\}-\{f_{int<t>}\}-[M]\{\ddot{u}_{<t+\Delta t>}\}-[C]\{\dot{u}_{<t+\Delta t>}\}+\alpha[K_T]\{\Delta u_{<j-1>}\}\end{aligned} \tag{6}$$

4．解析例　端部にトルクを受けて回転する柔らかな棒（図－１）を対象とした解析結果を通じて式(6)に与えた積分法の特性を具体的に示す。

解析対象　　荷重条件



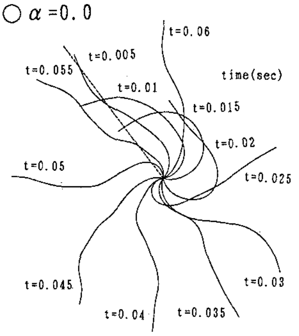
図－１



材料定数及びその他の諸量	
ﾔﾝｸﾞ率	E=10000 (kgf/cm^2)
断面2次ﾓｰﾒﾝﾄ	I=0.01 (cm^4)
断面積	A=1.0 (cm^2)
密度	ρ=0.091 (kg/cm^3)
要素分割数	40
積分時間間隔	$\Delta t=1.0\times10^{-4}$(sec)

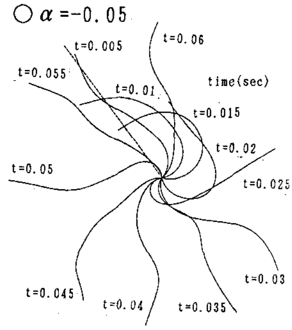
変形の進展

○ α=0.0

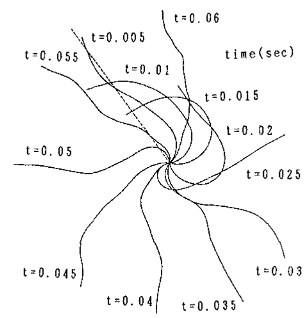


図－２(a)

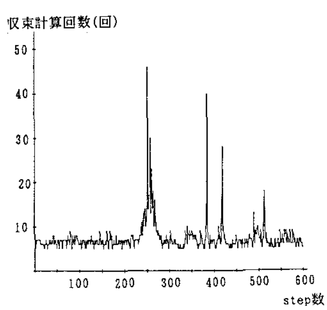
○ α=-0.05



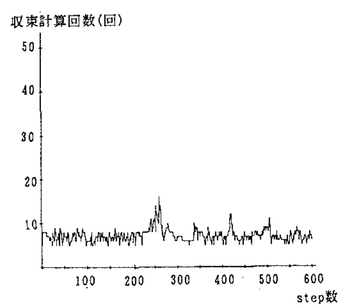
図－３(a)



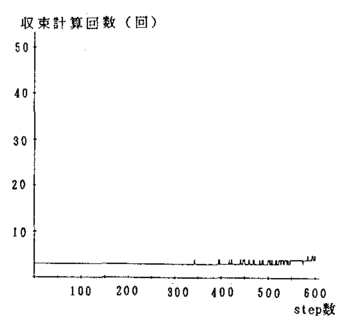
図－４(a)



図－２(b)



図－３(b)



図－４(b)

図－２(b)、図－３(b)は各増分ごとに収束に要した収束計算回数をプロットしたものであるが、それぞれを比較しても明らかなように式(6)に与えた積分法によって収束性の改善が図られていることが分かる。

5．おわりに　Ｈ－Ｈ－Ｔ法はＮｅｗｍａｒｋ－β法のアルゴリズムの本質的な簡潔さを変えずに特性の改善を可能にするものでその意義は大きい。図－４(a),(b)は筆者らの開発した解法[3)]によって得られた結果を示したもので、収束性は抜群であるが、この解法の場合には接線剛性マトリックスの作成が相対的に複雑であり、非対称になる。

＜参考文献＞

1)H.M.Hilber,T.J.R.Hughes and R.L.Taylor,"Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics",Earthquake Engrg.Struct.Dyn.5(1977)283-292

2)H.M.Hilber and T.J.R.Hughes,"Collocation,dissipation and 'overshoot'for time integration schemes in structural dynamics,Earthquake Engrg.Struct.Dyn.6(1978)99-118

3)吉田,依知川,岡本,"骨組構造の幾何学的非線形動的応答問題の定式化とその解法",構造工学数値解析法シンポジュウム論文集,Vol.13(1989)479-484