

愛媛大学大学院 学生員 ○林 英 範
 愛媛大学工学部 正会員 大久保 禎二
 観音寺市役所 正会員 牧 野 耕 司

1. まえがき

本研究は、非線形材料よりなる剛節骨組構造物のたわみ解析を行う方法として、エンゲッサーの第一定理に基づき、剛節骨組構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより未知部材端力を決定する解析アルゴリズムを用いて、任意の着目点の変位を決定する方法を提案するとともに、基礎的な考察および変位法による解との比較等を行った結果について述べるものである。

2. エンゲッサーの第一定理

エンゲッサーが1889年に文献1)で発表した論文により次の定理が成り立つ。

$$\partial U^* / \partial P_i = \Delta_i \quad (1)$$

ここに、 U^* : 構造物の最小化された全コンプリメンタリーエネルギー

P_i : 構造物の着目点 i における Δ_i 方向の集中荷重, Δ_i : 着目点 i における変位

この定理は材料の線形性、非線形性に関係なく成り立つものであり、構造物の最小化された全コンプリメンタリーエネルギー U^* を着目点の着目方向の力で偏微分することにより着目点の着目方向の変位が求められることになる。

3. エンゲッサーの第一定理にもとづく骨組構造物の非線形たわみ解析法

本研究では式(1)による剛節骨組構造物の任意点の任意方向のたわみの計算法として、以下の方法を用いることとした。

まず、実際の荷重載荷状態における未知部材端力 X を、各可動節点の力の釣合条件 $g(X)$ のもとで全コンプリメンタリーエネルギー U^* を最小化することにより決定し(式(2))、最小化された U^* を U_0^* とする。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Find} & X, \text{ Which} \\ \text{minimize} & U^*(X) \\ \text{Subject to} & g_j(X) = 0 \quad (j=1 \cdots q) \end{array} \right\} \quad (2) \quad \begin{array}{l} \text{ここに、} q: \text{可動節点における力の} \\ \text{つり合い条件式の総数} \end{array}$$

次に、実際の荷重に加えてたわみの着目点 i の着目方向に仮想荷重 δP_{i1} を載荷し、再び式(2)により U^* を最小化することにより求めた U^* を U^*_{Pi1} 、また、たわみの着目方向と反対の方向に仮想荷重 δP_{i2} を載荷し、式(2)により U^* を最小化することにより求めた U^* を U^*_{Pi2} とすると、変位 Δ_i は δP_i の載荷方法により次の3種類の差分式によりそれぞれ近似的に求めることができる。

$$(A) \quad \text{前進差分の場合} \quad \Delta_i = (U^*_{Pi1} - U^*_0) / \delta P_{i1} \quad (3)$$

$$(B) \quad \text{後退差分の場合} \quad \Delta_i = (U^*_0 - U^*_{Pi2}) / (-\delta P_{i2}) \quad (4)$$

$$(C) \quad \text{中央差分の場合} \quad \Delta_i = (U^*_{Pi1} - U^*_{Pi2}) / 2 \delta P_{i1} \quad (5)$$

ただし、(C)における U^*_{Pi1} , U^*_{Pi2} は、 $\delta P_{i1} = -\delta P_{i2}$ として求めたものである。

4. 変位法によるたわみの解析

上記のたわみ解析法の妥当性を検討するため、変位法による解との比較を行ったが、本研究で用いた変位法による剛節骨組構造物の非線形たわみ解析法の概要は次のとおりである。

① まず骨組構造物の各部材を長さ l $l=10\text{cm}$ の微小部材要素に分割し、各微小要素の断面に作用する曲げモーメント M および軸力 N を仮定し、仮想軸剛性 EA を式(6)より、仮想曲げ剛性 EI を式(7)より決定する。ここで、 ϵ_n は軸力 N のみにより生ずる断面のひずみ量、 ϵ_u , ϵ_l はそれぞれ N , M が作用する断面の釣合条件および断面変形に関する平面保持の条件を満たす部材の上縁および下縁ひずみである。

$$EA = N / \epsilon_n \quad (6) \quad EI = M \cdot H / (\epsilon_l - \epsilon_u) \quad H: \text{断面の高さ} \quad (7)$$

② 各微小部材要素ごとに EA , EI を用いて剛性行列を作成し、これらを集成して構造物全体の剛性行

列を作成し、全体剛性方程式を解くことにより各微小要素端における変位およびN, Mを求める。

- ③ ②で求めたN, Mを新たな仮定値として、N, MおよびEA, EIが一定値に収束するまで①, ②の計算を繰り返すことにより最終的な変位を決定する。

5. 解析例および解析結果の考察

本研究で提案したたわみ解析法の信頼性を検討するため、種々の剛節骨組構造物を3種類の非線形材料について解析したが、ここでは図-1に示す非線形材料からなる図-2に示す2径間ラーメンの解析例および変位法による解との比較を表-1および図-3に示す。

式(3)~(5)の仮想荷重 δP の大きさが本解析法による変位の大きさおよび変位法による解との相対誤差におよぼす影響は、表-1および図-3より明らかに、前進差分では δP が0.1→1.5%と大きくなるに従い得られる変位もわずかづつではあるが大きくなり、これに従い相対誤差も0.7→2.0%と直線的に増大している。一方、後退差分では、 δP が大きくなるに従い得られる変位がわずかづつではあるが小さくなっている。また、中央差分では δP の大きさにはほとんど関係なく一定値の変位が得られている。表-1および図-3において前進差分、後退差分共に δP が限りなく0に近づいた場合、中央差分より求めた変位と一致することより、中央差分より求めた変位が真の変位であることが推測される。また、他の解析例においても全く同様の傾向がみられる。

以上の検討結果をまとめると、本研究の方法において、仮想荷重を0.1%程度とすることにより前進差分、後退差分いずれの場合も真の変位に極めて近い変位が得られること、 $\delta P=0.1\sim 1.0\%$ 程度までは変位法による解との相対誤差が0.0~1.5%程度であることが明らかとなった。

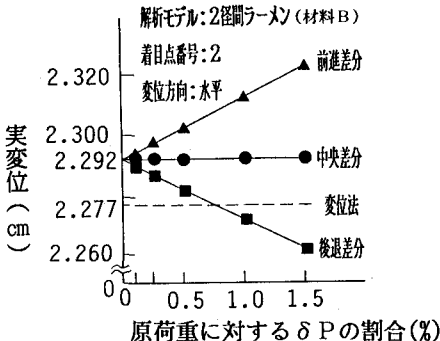


図-3 δP の大きさと実変位との関係

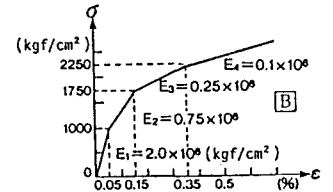


図-1 非線形材料B
(1kgf=9.81N)

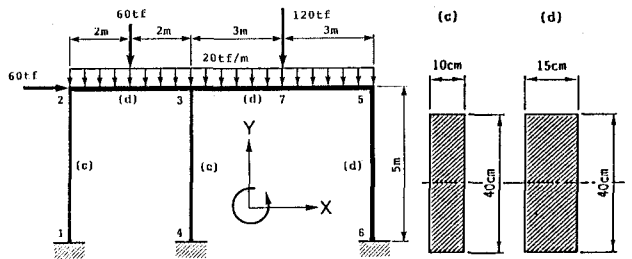


図-2 2径間ラーメン (材料B)

部材断面

表-1 エネルギー法による解析結果と変位法による解析結果との比較
(解析モデル: 2径間ラーメン (材料B))

着目点番号	変位方向	仮想荷重 δP の割合	変位 δP	相対誤差	前進差分	後退差分	中央差分	変位法による変位
2	水	0.1%	0.06tf	R.D (%)	2.294	2.290	2.292	2.277cm
		0.25%	0.15tf	R.D (%)	2.297	2.287	2.292	
		0.5%	0.3tf	R.D (%)	2.302	2.282	2.292	
	平	1.0%	0.6tf	R.D (%)	2.312	2.272	2.292	
		1.5%	0.9tf	R.D (%)	2.322	2.262	2.292	
				R.D (%)	2.0	0.68	0.63	
7	鉛	0.1%	-0.12tf	R.D (%)	-4.470	-4.461	-4.466	-4.422cm
		0.25%	-0.3tf	R.D (%)	-4.477	-4.455	-4.466	
		0.5%	-0.6tf	R.D (%)	-4.488	-4.444	-4.466	
	直	1.0%	-1.2tf	R.D (%)	-4.509	-4.422	-4.466	
		1.5%	-1.8tf	R.D (%)	-4.532	-4.401	-4.467	
				R.D (%)	2.5	0.48	1.0	
3	曲	2)	0.1tfm	R.D (%)	-7.463	-7.455	-7.459	-7.425 x 10^-3 rad
		2)	0.5tfm	R.D (%)	-7.479	-7.439	-7.459	
		2)	1.0tfm	R.D (%)	-7.499	-7.419	-7.459	
	接	2)	1.5tfm	R.D (%)	-7.515	-7.399	-7.457	
		2)	2.0tfm	R.D (%)	-7.536	-7.382	-7.459	
				R.D (%)	1.5	0.59	0.45	

1) R.D: 変位法による解との相対誤差 (%)

2) $P_i = 0$

3) 着目点の位置の番号は図-1に同一の番号で示す。

[参考文献] 1) F. Engesser, Ueber statisch unbestimmte Trager..., Z. Architekten Ing., vol. 35, Hannover, 1889