

I-62

初期不整の統計学

長岡技術科学大学 正会員 ○池田清宏
 東京大学 正会員 室田一雄

1 はじめに

初期不整は構造物の本質的、不可避的な不確定要因である。部材特性、節点位置、材料特性等の構造物の特性を定めるパラメータの初期不整は確率変数であり、結果として得られる耐荷力も必然的に確率変数となる。従来、構造力学の分野では、ある初期不整を与え耐荷力を求めるという操作を繰り返すことにより、耐荷力の確率分布を求めている。最近、著者の研究[1, 2]によって初期不整を持つ構造物の耐荷力の確率密度関数が解析的に求まることが明らかになった。本発表では単純特異点に限って、この解析手法の概念と簡単な応用例を報告する。詳しい議論については[1, 2]を参照されたい。

2 臨界初期不整

荷重 f を受ける構造物の非線形釣合方程式を

$$H(f, u, v) = 0 \quad (1)$$

とする。ここで u は節点変位 N 次元ベクトル、 v は初期不整 p 次元ベクトル、 H は十分滑らかな非線形関数とする。

完全系を $v = v^0$ とし、初期不整の大きさ(強度) ε とモード(パターン) d を区別して

$$v = v^0 + \varepsilon d$$

と表わす(上付き添字 0 は完全系の値を表す)。ただし、不整モード d は p 次元の球面

$$d^T d = 1 \quad (2)$$

上に正規化されているとする。

ε が小さいとき、耐荷力の変化量 $\hat{f}_c$ は

$$\hat{f}_c \sim C(d)\varepsilon^p \quad (3)$$

と表される(下付き添字 c は特異点の値を表す)。単純分岐点では、指数 ρ と $C(d)$ は特異点の種類に応じて以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \rho = 1, \quad C(d) &= C_0 a, & \text{極大点} \\ \rho = 1/2, \quad C(d) &= -C_0 a^{1/2}, & \text{非対称分岐点} \\ \rho = 2/3, \quad C(d) &= -C_0 a^{2/3}, & \text{不安定対称分岐点} \end{aligned}$$

ここで C_0 は正定数であり、 a は

$$a = \xi^T B d \quad (4)$$

と表される。ここに $B = (\partial H_i / \partial v_j)_c$ は不整感度行列を、 ξ は完全系の特異点における接線剛性行列 J^0 の固有ベクトル ($J^0 \xi = 0, \xi^T \xi = 1$) をそれぞれ表す。

式(4)から明らかなように、初期不整パターン d が臨界初期不整

$$d^* = \frac{B^T \xi}{\|B^T \xi\|}$$

に等しいとき $|C(d)|$ が最大となる(この最大値を $|C(d)|_{\max}$ とする)。このとき、漸近的な意味で耐荷力の変化量の絶対値 $|\hat{f}_c|$ も最大になる。

3 確率密度関数

初期不整ベクトル d が p 次元の球面(2)上に一様に分布すると仮定する。 d の d^* 方向成分だけが耐荷力の変化量 $\hat{f}_c$ に寄与することから、 $\hat{f}_c$ の確率密度関数は容易に求まる。正規化した耐荷力変化量 $\zeta = \hat{f}_c / (\varepsilon^p |C(d)|_{\max})$ の確率密度関数 $f(\zeta)$ 、平均 $E[\zeta]$ 、及び分散 $V[\zeta]$ を、各種の単純特異点毎に以下に示す。

極大点

$$f(\zeta) = C_{1p}(1 - \zeta^2)^{(p-3)/2} \quad (-1 \leq \zeta \leq 1)$$

$$E[\zeta] = 0$$

$$V[\zeta] = p^{-1}$$

ここで

$$C_{1p} = \frac{2^{-p+2}}{B(\frac{p-1}{2}, \frac{p-1}{2})}, \quad B(s, t) = \text{ベータ関数}$$

非対称分岐点

$$f(\zeta) = 4C_{1p}|\zeta|(1-\zeta^4)^{(p-3)/2} \quad (-1 \leq \zeta \leq 0)$$

$$E[\zeta] = -C_{1p}B\left(\frac{3}{4}, \frac{p-1}{2}\right)$$

$$\sim \frac{-2^{1/4}\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi}}p^{-1/4} \quad (p \rightarrow +\infty)$$

$$V[\zeta] = \frac{2}{p-1}C_{1p} - \left(C_{1p}B\left(\frac{3}{4}, \frac{p-1}{2}\right)\right)^2$$

$$\sim \frac{\sqrt{2\pi} - \sqrt{2}\Gamma(3/4)^2}{\pi}p^{-1/2} \quad (p \rightarrow +\infty)$$

対称不安定分岐点

$$f(\zeta) = 3C_{1p}|\zeta|^{1/2}(1-|\zeta|^3)^{(p-3)/2} \quad (-1 \leq \zeta \leq 0)$$

$$E[\zeta] = -C_{1p}B\left(\frac{5}{6}, \frac{p-1}{2}\right)$$

$$\sim \frac{-2^{1/3}\Gamma(5/6)}{\sqrt{\pi}}p^{-1/3} \quad (p \rightarrow +\infty)$$

$$V[\zeta] = C_{1p}B\left(\frac{7}{6}, \frac{p-1}{2}\right) - \left(C_{1p}B\left(\frac{5}{6}, \frac{p-1}{2}\right)\right)^2$$

$$\sim \text{const.} \times p^{-2/3} \quad (p \rightarrow +\infty)$$

4 適用例

数値計算例として、図1に示す24本の弾性部材からなる正六角形トラスが、表1に示す2種類の垂直荷重を受ける場合を考える。荷重(a)では極大点、荷重(b)では単純不安定対称分岐点、それぞれ耐荷力を支配している。

部材の断面積 A_i を初期不整パラメータにとり

$$v = (A_1, \dots, A_{24})^T$$

とする。これは完全系では $v^0 = (A_1, \dots, A_{24})^T$ に等しいとする。この2ケース ($p=24$) に対し、耐荷力の変化量の確率密度関数をそれぞれ求め、図2に曲線で示した。比較のために、初期不整 v を100個ランダムに与え、釣合式(1)を直接解く方法により $\hat{f}_c$ を求め、図2にヒストグラフで示した。この両者は良く一致しており、理論式の妥当性を示している。

参考文献

- [1] K. Ikeda and K. Murota: Critical initial imperfection of structures, to appear in Int. J. of Solids and Structures, 1990.
[2] K. Ikeda and K. Murota: On random initial imperfection of structures, preprint.

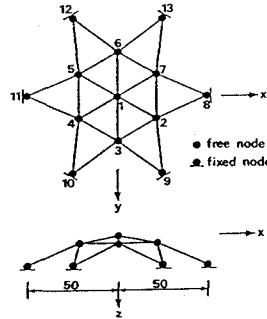


表 1

垂直荷重パターン

Node Number	Loading Pattern	
	(a)	(b)
1	1	0.5
2	1	1
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	1	1
7	1	1

図1 正六角形トラスドーム

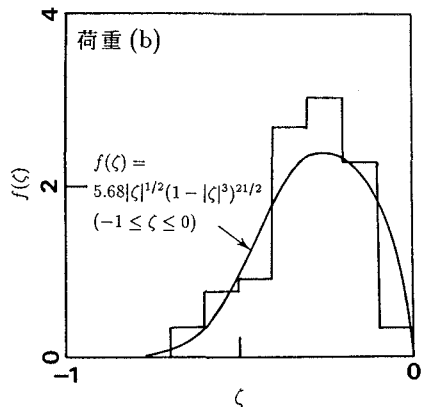
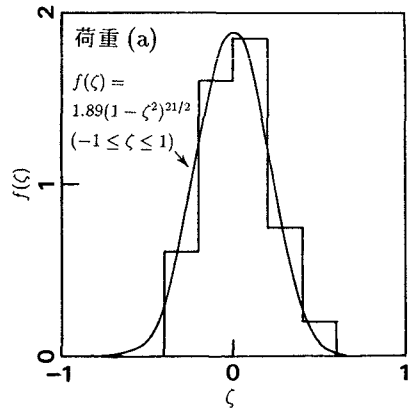


図2 耐荷力変化量の確率密度関数