

I-14 変厚板の複合非線形問題の一解析法

長崎大学 ○正 員 森田千尋

長崎大学 正 員 松田 浩

長崎大学 正 員 崎山 毅

1. まえがき

著者らは先に、変厚矩形板の解法として、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により板の縦横の等分割線の交点における離散解を求め、これに基づく変厚板の解析法を提示した。¹⁾ 本文は、その解法を幾何学的非線形性と材料非線形性の両方を考慮した、複合非線形問題に拡張したものである。数値解析例として等分布荷重が作用する四辺固定正方形板の場合を示す。

2. 変厚板の基礎微分方程式

板厚中央面上の x, y 方向の面内変位成分を u, v および垂直方向の変位成分を w とし、面内力を N_{xy}, N_y および N_x 、せん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x とすれば、せん断変形の影響を考慮した変厚板の曲げに関する増分形の基礎微分方程式は次のようになる。

(1) 面外曲げ変形に関する基礎微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} + \Delta q \\ + \Delta N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \right) + \Delta N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \right) + 2\Delta N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad \frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \\ \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{D} (\bar{\phi}_{11} \Delta M_x + \bar{\phi}_{12} \Delta M_y + \bar{\phi}_{13} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\Phi_{11} \Delta e_x + \Phi_{12} \Delta e_y + \Phi_{13} \Delta e_{xy}) \\ \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{D} (\bar{\phi}_{21} \Delta M_x + \bar{\phi}_{22} \Delta M_y + \bar{\phi}_{23} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\Phi_{21} \Delta e_x + \Phi_{22} \Delta e_y + \Phi_{23} \Delta e_{xy}) \\ \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} = \frac{1}{D} (\bar{\phi}_{31} \Delta M_x + \bar{\phi}_{32} \Delta M_y + \bar{\phi}_{33} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\Phi_{31} \Delta e_x + \Phi_{32} \Delta e_y + \Phi_{33} \Delta e_{xy}) \\ \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{\Delta Q_x}{\kappa Gh} \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{\Delta Q_y}{\kappa Gh} \quad (1) \end{aligned}$$

(2) 面内変形に関する基礎微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial x} = \frac{1}{F} (\bar{\phi}_{11} \Delta N_x + \bar{\phi}_{12} \Delta N_y + \bar{\phi}_{13} \Delta N_{xy}) \\ - h(\Psi_{11} \Delta \beta_x + \Psi_{12} \Delta \beta_y + \Psi_{13} \Delta \beta_{xy}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} = \frac{1}{F} (\bar{\phi}_{21} \Delta N_x + \bar{\phi}_{22} \Delta N_y + \bar{\phi}_{23} \Delta N_{xy}) \\ - h(\Psi_{21} \Delta \beta_x + \Psi_{22} \Delta \beta_y + \Psi_{23} \Delta \beta_{xy}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} = \frac{1}{F} (\bar{\phi}_{31} \Delta N_x + \bar{\phi}_{32} \Delta N_y + \bar{\phi}_{33} \Delta N_{xy}) \\ - h(\Psi_{31} \Delta \beta_x + \Psi_{32} \Delta \beta_y + \Psi_{33} \Delta \beta_{xy}) - \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \quad (2) \end{aligned}$$

ここに、 $q=q(x, y)$:横荷重強度、 E :弾性係数、 $G=E/[2(1+\nu)]$:せん断弾性係数、 ν :ポアソン比、 $h=h(x, y)$:板厚、 $D=D(x, y)=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$:板の曲げ剛度、 $\kappa=5/6$:せん断修正係数、 $F=F(x, y)=Eh/(1-\nu^2)$:板の面内剛度、 Δ :荷重増分 Δq に対する各断面力および変形量の増分、 $[\bar{\phi}_{ij}]=[\phi_{ij}]^{-1}$ 、 $[\bar{\phi}_{ij}]=[\phi_{ij}]^{-1}$ 、 $[\Phi_{ij}]=[\bar{\phi}_{ij}][\chi_{ij}]$ 、 $[\Psi_{ij}]=[\bar{\phi}_{ij}][\chi_{ij}]$

次の無次元量、

$$\begin{aligned} X_1=a^2 Q_y/[D_0(1-\nu^2)], X_2=a^2 Q_x/[D_0(1-\nu^2)], X_3=a M_{xy}/[D_0(1-\nu^2)], X_4=a M_y/[D_0(1-\nu^2)], \\ X_5=a M_x/[D_0(1-\nu^2)], X_6=\theta_y, X_7=\theta_x, X_8=w/a, \eta=x/a, \xi=y/a, a, b: \text{矩形板の縦横の辺長}, \mu=b/a, \\ h_0: \text{基準板厚}, D_0=Eh_0^3/[12(1-\nu^2)]: \text{基準板曲げ剛度} \end{aligned}$$

を用いて式(1)を無次元化後、任意の離散点 (i, j) における離散解 $\Delta X_{p,ij}$ ($p=1\sim 8$)は次のように整理される。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left(\sum_{k=0}^i a_{pijkd} \cdot \Delta X_{rko} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \cdot \Delta X_{uol} \right) + \Delta q_{pij} \quad (3-A)$$

(r=1,3,4,6,7,8, s=2,3,5,6,7,8)

同様にして次の無次元量、

$$X_9 = v/a, \quad X_{10} = u/a, \quad X_{11} = a^2 N_{xy} / [D_0 (1 - \nu^2)],$$

$$X_{12} = a^2 N_y / [D_0 (1 - \nu^2)], \quad X_{13} = a^2 N_x / [D_0 (1 - \nu^2)]$$

を式(2)に導入すると、任意の離散点(i,j)における離散解 ΔX_{pij} (p=9~13)は次のように整理される。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^A \left(\sum_{k=0}^i a_{pijkd} \cdot \Delta X_{tko} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \cdot \Delta X_{uol} \right) + \Delta q_{pij} \quad (3-B)$$

(t=9,10,11,12, u=9,10,11,13)

式(3)の導入過程については文献1)を参照されたい。

3. 数値計算手法および解析結果

いま第n荷重段階で変厚板の断面の一部が弾塑性状態にあるとするなら、基礎微分方程式(1),(2)における変数係数 $[\bar{\phi}_{ij}]$, $[\bar{\psi}_{ij}]$ 等は次の計算手順によって求めることができる。なお、本文においては断面を多層等分割して解析を行う。(板厚方向の分割数:nz=20)

〔データ〕第(n-1)荷重段階における無次元応力

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_0} = \sum_{g=1}^{n-1} \frac{\Delta \sigma_x}{\sigma_0}, \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \sum_{g=1}^{n-1} \frac{\Delta \sigma_y}{\sigma_0}, \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} = \sum_{g=1}^{n-1} \frac{\Delta \tau_{xy}}{\sigma_0}$$

(a) 第(n-1)荷重段階の無次元応力を用いて、すべての離散点における断面のすべての要素についての無次元偏差応力 $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$ を計算する。

(b) $[\bar{\phi}_{ij}] = [\phi_{ij}]^{-1}$, $[\bar{\psi}_{ij}] = [\psi_{ij}]^{-1}$ 等の計算。

(これにより剛性の低下が評価される)

(c) 第n荷重段階での荷重増分 Δq に対する断面力および変形量の増分を求める。

($\Delta M_{xy}, \Delta M_y, \Delta M_x, \Delta N_{xy}, \Delta N_y, \Delta N_x$ の算定)

(d) 第n荷重段階における無次元増分応力の算定。

$$\Delta \sigma_x / \sigma_0, \quad \Delta \sigma_y / \sigma_0, \quad \Delta \tau_{xy} / \sigma_0$$

(e) 第n荷重段階における無次元応力の算定。

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_0} = \sum_{g=1}^n \frac{\Delta \sigma_x}{\sigma_0}, \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \sum_{g=1}^n \frac{\Delta \sigma_y}{\sigma_0}, \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} = \sum_{g=1}^n \frac{\Delta \tau_{xy}}{\sigma_0}$$

以上の(a)~(e)の計算を増分法を用いて繰り返し計算を行う。

図1に中央点の荷重変位曲線、図2に代表的な荷重段階における断面力および変位図を示す。

参考文献

- 1) 崎山毅・松田浩：変厚矩形板の曲げの一解析法、土木学会論文報告集、第338号、pp.21-28, 1983.
- 2) 松田浩・崎山毅：矩形板の非弾性曲げの一解析法、構造工学論文集、Vol.33A, pp.257-264, 1987.

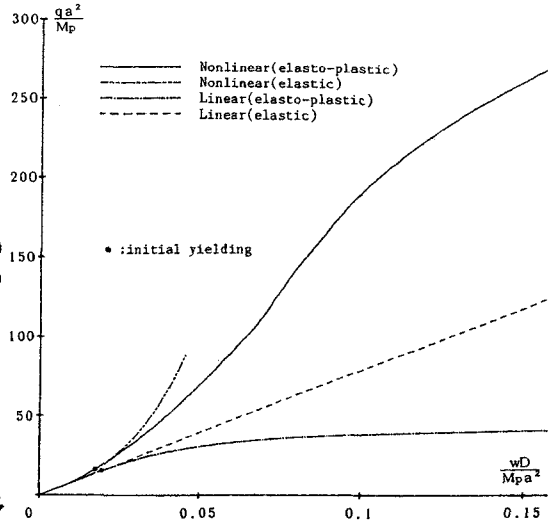


図1 中央点の荷重変位曲線

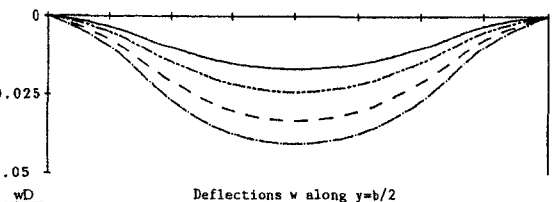
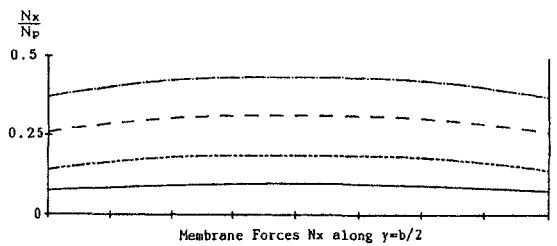
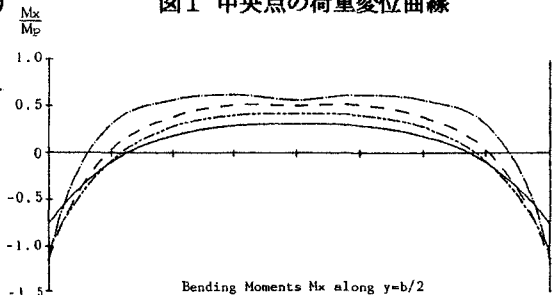


図2 断面力および変位図