I-12　　動的問題のための時間依存座標系を用いた定式化について

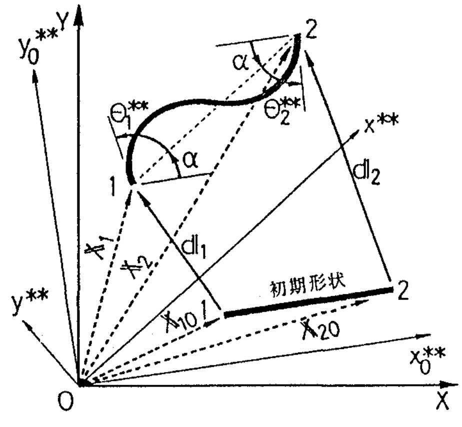
武蔵工業大学　正　員　増田陳紀　　日本道路公団○正　員　高橋広幸
武蔵工業大学　正　員　西脇威夫　　武蔵工業大学　学生員　平野健二

１．はじめに

大きな剛体運動を伴いながら大変形する構造物の解析には幾何学的非線形性を考慮した動的応答解析が必要である．こうした動的解析の研究の代表的なものに、Simoら[1]の研究があるが、数学的に複雑で、必ずしも一般に理解しやすい内容ではない．一方、著者らは，座標表示に基づく幾何学的非線形解析手法を動的応答解析に拡張し、数学的に分かりやすい骨組構造の幾何学的非線形動的応答解析手法を提案した[3]．そこでは、復元力評価の際に増分間において要素と共に移動する座標系を用い、慣性力評価の際には更新ラグランジュ型の増分間固定座標系を用いている．本報告では、慣性力評価の際にも、増分間に空間固定でない時間に依存する要素座標系を用いることにより、より整合性のある定式化を行なった結果を報告する．

２．時間依存性を有する要素座標系を用いた慣性力の評価

慣性力の評価に際して，全体座標系の原点を原点とし，要素第１節点から第２節点を望む方向で，部材軸と平行に要素座標系のx^{**}軸を持つ直交座標系（x^{**}－y^{**}座標系）を要素座標系に用いる．この座標系は，要素の剛体的な回転運動にともなって回転する回転座標系であり，非慣性系である．ここで，回転座標系を用いる理由は，微小ひずみを前提にすれば，この座標系において質量の分布は一定であり，要素質量行列には常に一定な線形質量行列を用いることができることにある．ここで示す慣性力の評価方法では，要素質量行列に一般的な整合質量行列を用いることが可能である．集中質量行列を用いた場合にはさらに簡単な定式化を得ることができるが，本研究においては要素質量行列に特別な制約は設けない．



図－１　慣性力評価の際の要素座標系

図１に，慣性力評価の際の要素座標系と変位場の概念を示す．全体座標系と要素座標系の原点が一致しているので，座標ベクトルの座標変換関係が常に式（１）の形で成り立つ．全体座標系から要素座標系への変換行列を$\mathbf{T}$、一般化座標ベクトル(初期節点座標ベクトル$\mathbf{X}_0$と節点変位ベクトル$\mathbf{u}$および要素の剛体回転ベクトルに負の符号を負荷したもの$\mathbf{r}$の和で表わされるベクトル)を$\mathbf{x}$とおけば，

$$\mathbf{x}^{**}=\mathbf{T}\,\mathbf{x} \tag{1}$$

である．上付きの**は，要素座標系に関する緒量であることを示す．要素座標系での速度ベクトル$\dot{\mathbf{x}}^{**}$，加速度ベクトル$\ddot{\mathbf{x}}^{**}$は，式（１）を時間に関して微分して，それぞれ次のように求められる．

$$\dot{\mathbf{x}}^{**}=\mathbf{T}\,\dot{\mathbf{x}}+\dot{\mathbf{T}}\,\mathbf{x} \tag{2}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}^{**}=\mathbf{T}\,\ddot{\mathbf{x}}+2\,\dot{\mathbf{T}}\,\dot{\mathbf{x}}+\ddot{\mathbf{T}}\,\mathbf{x} \tag{3}$$

時間とともに回転する座標系での緒量を用いて全体座標系での慣性力を表現する場合，見かけの力が作用するのは古典動力学に示される通りである．すなわち，全体座標系での慣性力$\mathbf{f}\mathrm{i}$ は，要素座標系での慣性力を座標変換したものに，見かけの力としてのコリオリ力と遠心力を加えた力に等しい．すなわち、$\mathbf{M}^{**}$を

質量行列とすると、運動量$\mathbb{P}$が、

$$\mathbb{P}=\mathbb{T}^{T}\mathbb{P}^{**}+\dot{\mathbb{T}}^{T}\mathbb{M}^{**}\mathbb{x}^{**}$$

$$=\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\dot{\mathbb{x}}^{**}+\dot{\mathbb{T}}^{T}\mathbb{M}^{**}\mathbb{x}^{**} \qquad (4)$$

$$\mathbb{f}_{i}=d\mathbb{P}/dt=\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\ddot{\mathbb{x}}^{**}$$

$$+\{2\dot{\mathbb{T}}^{T}\mathbb{M}^{**}\dot{\mathbb{x}}^{**}+\ddot{\mathbb{T}}^{T}\mathbb{M}^{**}\mathbb{x}^{**}\} \qquad (5)$$

となる（図－２参照）．この式（５）に，式（１）～（３）を代入して整理すると，

$$\mathbb{f}_{i}=\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\mathbb{T}\ddot{\mathbb{x}}$$

$$+2\{\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\dot{\mathbb{T}}+\dot{\mathbb{T}}^{T}\mathbb{M}^{**}\mathbb{T}\}\dot{\mathbb{x}}$$

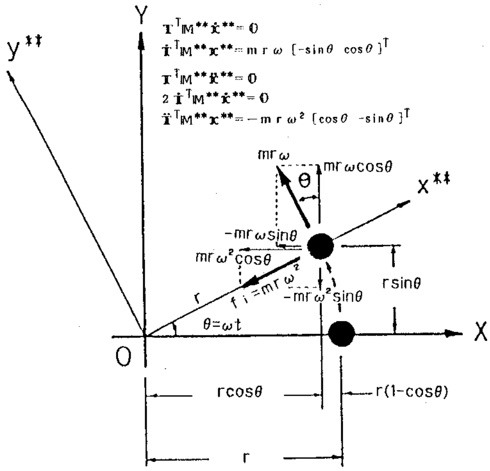
$$+\{\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\ddot{\mathbb{T}}+2\dot{\mathbb{T}}^{T}\mathbb{M}^{**}\dot{\mathbb{T}}+\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\ddot{\mathbb{T}}\}\mathbb{x}$$

$$=\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\mathbb{T}(\ddot{\mathbb{u}}+\ddot{\mathbb{r}})$$

$$+2\{\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\dot{\mathbb{T}}+\dot{\mathbb{T}}^{T}\mathbb{M}^{**}\mathbb{T}\}(\dot{\mathbb{u}}+\dot{\mathbb{r}})$$

$$+\{\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\ddot{\mathbb{T}}+2\dot{\mathbb{T}}^{T}\mathbb{M}^{**}\dot{\mathbb{T}}+\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\ddot{\mathbb{T}}\}\mathbb{x} \qquad (6)$$

が得られる．



図－２　回転運動する質点の場合の運動量と慣性力

３．運動方程式

復元力に関しては、文献２）にしたがって評価し、減衰力は文献４）で示したものと同様にRayleigh型の減衰を用いると、式（５）の慣性力を加えて、ある時刻（t）における運動方程式が次のように求められる．

$$\mathbb{f}=\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\mathbb{T}(\ddot{\mathbb{u}}+\ddot{\mathbb{r}})+2\{\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\dot{\mathbb{T}}+\dot{\mathbb{T}}^{T}\mathbb{M}^{**}\mathbb{T}\}(\dot{\mathbb{u}}+\dot{\mathbb{r}})$$

$$+\{\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\ddot{\mathbb{T}}+2\dot{\mathbb{T}}^{T}\mathbb{M}^{**}\dot{\mathbb{T}}+\mathbb{T}^{T}\mathbb{M}^{**}\ddot{\mathbb{T}}\}\mathbb{x}+\mathbb{T}^{T}\mathbb{C}^{**}\mathbb{T}\dot{\mathbb{u}}+\mathbb{T}^{T}\mathbb{K}^{**}\{\mathbb{T}\mathbb{x}-\mathbb{T}_{0}\mathbb{x}_{0}\}$$

となる．ここで、$\mathbb{C}^{**}$および$\mathbb{K}^{**}$は、それぞれ減衰行列、剛性行列である．

４．おわりに

本研究では、大きな剛体運動を伴いながら大変形する構造物の動的応答解析を行なうためには、変形を記述する座標系に時間依存の座標系を用い、座標系の時間依存性に起因する付加的な力を考慮することが有効であるとの立場から、運動方程式の定式化を行なった．空間固定の座標系を用いた定式化と本定式化の計算効率の比較などについては、本講演会において別途に報告する予定である．

◆ 参考文献 ◆

1） J.C.Simo and L.vu Quoc : On The Dynamics On Space Of Rods Undergoing Large Motions - A Geometrically Exact Approach, Comp. Meth. In Appl. Mech. And Eng. 66, pp.125～161, 1988.

2） 吉田　裕・増田陳紀・松田　隆 ：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法，土木学会論文報告集，第228号，pp.41～55，1979年8月.

3） Masuda,N., Nishiwaki,T. and Minagawa,M. : Nonlinear Dynamic Analysis of Frame Structures , Comp. & Struct., Vol.27, No.1, pp.103～110, 1987.

4） 増田陳紀・西脇威夫・皆川　勝・高橋広幸 ：幾何的非線形動的応答解析の一手法と平面骨組解析への応用，構造工学論文集，Vol.35A, pp.185-194, 1989年3月.