

I-9 要素剛性分離の手法による等張力 曲面の形状解析と膜構造解析

佐賀大学 学生員 深江 葉子
正会員 後藤 茂男
学生員 木元 秀満

1. まえがき

近年、各地博覧会のパビリオン等で身近なものとなった膜構造物であるが、その設計の基本は、応力集中の少ない力と形の調和のとれた安定した曲面形状を求めることにある。曲げ剛性のない、張力のみで抵抗できる連続した超軽量の薄膜材で曲面を覆う構造形態を考えれば、自重を無視し、内圧と釣合う定張力分布を示す石鹸膜の形状を初期形状として設定することはきわめて合理的であり、その条件下において最小の表面積となる石鹸膜曲面の問題は、古くから微分幾何学、複素関数論また変分学の分野で研究されてきた。しかし、解析解を得ることはできず、膜構造の初期形状策定には石鹸膜模型が利用されていたようである。

著者らは、有限要素構造物の要素変形と節点変位の適合条件の非線形性に起因する接線幾何剛性を要素固有の剛性から完全に分離して接線剛性法を適用する幾何学的非線形解析手法を任意の境界の石鹸膜構造に応用し、合理的な膜構造の初期形状策定の解析的手法を得ることができた。もちろん、この要素剛性分離の手法は完成後の膜と線材や骨組みとの合成構造系の幾何学的非線形挙動の解析にも有利な手法であり、荷重の載荷除荷、変位制御もさらに容易に行えるので、各種構造物の

- 1) 初期形状の試策、決定 → 要素の無応力裁断寸法の決定
- 2) 要素剛性の付与、自重の載荷 → 完成系の形状、応力の決定
- 3) -1 風荷重等の載荷による変位応力解析

-2 空気圧の減圧によるインフレあるいはデフレ時の解析

などを、一貫して同一理論による同一プログラムの解析が可能となる。

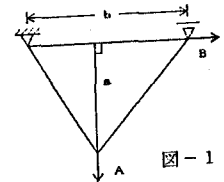


図-1

2. 三角形石鹸膜要素の要素力

表面張力一定の石鹸膜曲面を平面三角形要素による有限要素構造で近似する。等方性平面三角形要素に図-1のような静定な拘束条件を与えた時の要素力式は(1)式となり、また図-2,3のような要素力の組合せに対しては(2),(3)式となる。

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{\sigma t}{2} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \quad \dots\dots (1)$$

$$A_i = \sigma t \cdot b_i / 2 \quad \dots\dots (2)$$

$$N_i = \sigma t (a_i^2 - c_i d_i / a_i) / 2 \quad \dots\dots (3)$$

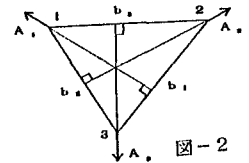


図-2

3. 幾何剛性と接線剛性方程式

三角形要素の辺張力 N_1, N_2, N_3 による接線幾何剛性マトリックスは、三辺をそれぞれ軸方向力部材と考えた時のトラスブロックのものと全く同一となる。即ち、辺 i の共通座標系に対する方向余弦を $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ とすれば、その一端を固定した軸方向力部材としての接線幾何剛性マトリックスは、

$$k_i = \frac{N_i}{b_i} \begin{bmatrix} 1-\alpha_i^2 & -\alpha_i\beta & -\alpha_i\gamma \\ -\alpha_i\beta & 1-\beta_i^2 & -\beta_i\gamma \\ -\alpha_i\gamma & -\beta_i\gamma & 1-\gamma_i^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (4)$$

となり、これを用いて三角形要素の接線剛性方程式が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix} = (K_0 + \begin{bmatrix} k_2+k_3 & -k_3 & -k_2 \\ -k_3 & k_3+k_1 & -k_1 \\ -k_2 & -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (5)$$

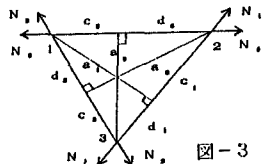


図-3

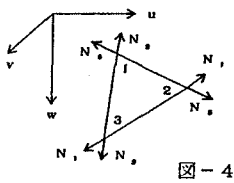


図-4

尚、 K_0 の影響はほとんどなく、石鹸膜構造は幾何剛性のみを有する特殊な構造系であると言える。

また、内圧による面外節点力は、内圧を p として次のベクトルで表される。

$$P = (u_2 - u_1) \times (u_3 - u_1) p / 6 \quad \dots\dots (6)$$

4. 等張力平面三角形有限要素構造による石鹸膜曲面解析における不平衡力と収束性

通常の要素剛性を有する有限要素構造物の幾何学的非線形解析において、著者らの要素剛性分離の手法による接線剛性法は、荷重増分の大きさが適切な範囲であれば、不平衡力は急速に減少するきわめて良好な収束性状を示す。完全に幾何剛性のみしか有さない等張力有限要素構造においても、最初の数回の反復でかなりの微小な不平衡力状態へと近づく。

図-5は、正六角形を96個の三角形に要素分割し、膜張力 25kgf/m に対して内圧 10kgf/m^2 を与えた場合の釣合形状を示したものであり、表-1は平面を初期状態 ($n=0$) とする各反復回数とその時の最大不平衡力の値 δF を示したもので $n=2$ 以降の不平衡力の減少はきわめて緩慢となる。この最終段階 $n=11$ における不平衡力を調べてみると、図-5に黒丸で示した隅角近傍点での不平衡力が最大で 0.4713kgf に達するが、その他の全節点に関しては、 $0.0313 \sim 0.0599$ とほぼ十分な収束状態に達していることがわかる。また、緩慢な減少しか示さない隅角近傍点の位置は反復段階毎に次第に支点である隅角点に近づいていく。

図-6, 7, 8に、膜張力 25kgf/m 、内圧 25kgf/m^2 を与えた時の各不平衡力の推移を表-2に示す。最も単純な理論的平衡状態が存在する1自由節点の場合 (δF_1) は2回で十分な収束となるが、2自由節点 (δF_2 、図-7) では2回以降漸減するが収束しない。図-9は、この間の片方の節点の位置と不平衡力の関係を表す曲面である。点は各反復段階の解の推移を示しており、ほぼ2回目からは不平衡力が最小となる曲面の尾根の部分をとどめていることがわかる。なお最終的に、2自由節点は一点に重なり不平衡力は0となるが当初の分割の意味はなくなる。図-8はこれに太線の位置に伸び刚度 1tf/m の弾性糸を張った場合で、弾性糸の伸びが不平衡力を吸収し収束性はきわめて良好となる (δF_3)。

要するに、本解析法においては、各反復過程における節点荷重は、その節点を共有する各三角形の面積と方向の変化による面外方向の節点力ベクトルとしての大きさや方向の変動を厳密に考慮して、全要素等張力の条件下で変形後の三角形の要素力との釣合を満足する解を得ようとするものであるが、曲面を有限個の三角形要素で近似するため一般に不平衡力が完全に0となる理論的な平衡状態が存在するとは限らない。しかし、ある程度の反復で最大不平衡力の収束状態が安定すれば、そのときの各節点の座標値を求める等張力曲面の近似解として差し支えないものと思われる。

5. その他の計算例と考察

図-10～図-14は、一辺6mの正三角形2個を互いに直行する平面としたものを初期状態としての内圧のない最小曲面を求める各反復段階毎の形状を追跡して収束までの形状の変化を見たもので、表-2の δF_4 に不平衡力の推移を示す。

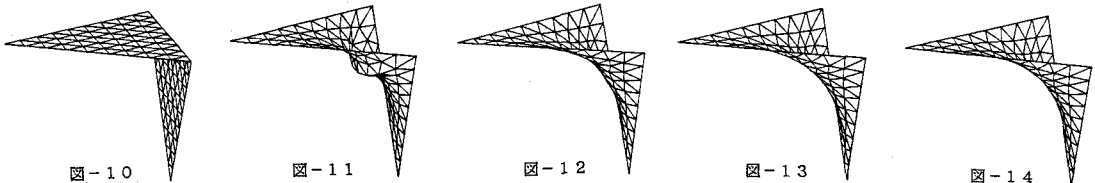


表-1

n	δF kgf
0	8.6603
1	2.5148
2	0.5249
3	0.5097
4	0.5072
5	0.5024
6	0.4973
7	0.4921
8	0.4869
9	0.4817
10	0.4765
11	0.4713

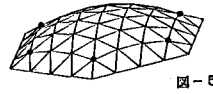


図-5



図-6

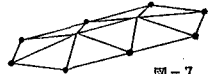


図-7

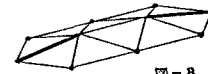


図-8

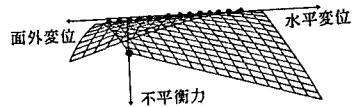


図-9

表-2

n	δF_1	δF_2	δF_3	δF_4 kgf
0	9.623	9.623	9.623	23.570
1	0.173	0.270	13.050	22.393
2	0.002	0.130	0.556	13.452
3		0.128	0.033	1.922
4		0.127	0.002	0.087
5		0.126		0.086
6		0.124		0.083