

## I-8

## 立体骨組構造の幾何学的非線形解析の精密化

長岡技術科学大学 正会員 岩崎英治

長岡技術科学大学 正会員 林 正

## 1. まえがき

マトリックス法による立体骨組構造の座屈や有限変位解析に関しては、多くの研究があり、アーチなどの曲線部材は直線要素を集めた折れ線部材で近似され、その解は多くの場合において数値的に正しい。しかし、著者らは、曲線部材の幾何学的非線形解析に直線要素を用いて解析した値と曲線要素を用いたものでは一致しない場合があることを、無限の要素数を用いた場合の解の収束値と、この収束値を解として得る基礎式や基礎方程式を曲線部材のそれらと比較することにより示している。また、直線要素による新しい方法として、幾何学的非線形解析において整合のとれた諸量を一般化変位に用いた要素を提案している<sup>1)</sup>。

本報告は、上述の新しい要素による座屈解析を行い、その精度を解析解と数値的に比較する。また、有限変位解析を行った場合の精度と収束性を更新Lagrangeと剛体変位を除去した全Lagrangeの手法について示す。

## 2. 直線要素の変位関数

薄肉要素では、1節点で並進変位 $u_i$ 、回転 $\theta_i$  ( $i=1,2,3$ )とねじれ率 $\kappa_i$ を一般化変位として用いて、要素両端の14自由度から、要素軸方向の変位 $u_1$ は1次式、この軸に直交する2方向の変位 $u_2, u_3$ とねじれ角 $\theta_1$ は、3次式で表すと次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= N_1 u_{1a} + N_2 u_{1b}, & u_2 &= N_3 u_{2a} + N_4 l \left[ (1 + \bar{u}_1) \theta_{3a} + \frac{1}{2} \theta_{1a} \theta_{2a} \right] + N_5 u_{2b} + N_6 l \left[ (1 + \bar{u}_1) \theta_{3b} + \frac{1}{2} \theta_{1b} \theta_{2b} \right] \\ u_3 &= N_3 u_{3a} + N_4 l \left[ -(1 + \bar{u}_1) \theta_{2a} + \frac{1}{2} \theta_{1a} \theta_{3a} \right] + N_5 u_{3b} + N_6 l \left[ -(1 + \bar{u}_1) \theta_{2b} + \frac{1}{2} \theta_{1b} \theta_{3b} \right] \\ \theta_1 &= N_3 \theta_{1a} + N_4 l \left[ l \kappa_{1a} + (3\bar{u}_2 - \theta_{3b}) \theta_{2a} + (3\bar{u}_3 + \theta_{2b}) \theta_{3a} \right] + N_5 \theta_{1b} + N_6 l \left[ l \kappa_{1b} - (3\bar{u}_2 - \theta_{3a}) \theta_{2b} - (3\bar{u}_3 + \theta_{2a}) \theta_{3b} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、添字 $a, b$ は要素両端の節点を表し、 $l$ は要素長、 $N_i$  ( $i=1 \sim 6$ )は形状関数であり $a$ 端で $\xi=0$ 、 $b$ 端で $\xi=1$ になる正規座標 $\xi$ より、次式で与えられる。

$$N_1 = 1 - \xi, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = (1 - \xi)^2 (1 + 2\xi), \quad N_4 = \xi (1 - \xi)^2, \quad N_5 = \xi^2 (3 - 2\xi), \quad N_6 = -\xi^2 (1 - \xi)$$

また、 $(u_{1b} - u_{1a})/l$ を $\bar{u}_1$ とおいている( $i=1,2,3$ )。

そり変形を省略できる充実要素では、ねじれ率を除いた要素両端の12自由度で要素内の変位とねじれ角が表される。ただし、変位は薄肉要素の式と同一であり、ねじれ角は次式で与えられる。

$$\theta_1 = N_1 \theta_{1a} + N_2 \theta_{1b} \quad (2)$$

既往の要素の変位関数は、これらの変位関数で一般化変位に関する2次の項を省略したものである<sup>2), 3)</sup>。

## 3. 座屈解析

新しい変位関数と既往の変位関数を用いて、円弧アーチの曲げねじれ座屈解析を行ないGalerkin法により求めた座屈荷重と比較する。ただし、座屈前の変位は微小として、座屈前の形状変化による影響は省略し、それぞれの変位関数によるマトリックス法とGalerkin法には、同一の変位とひずみを用いる。

図-1は純曲げが生じるように両端にモーメントが作用した場合、図-2は端部に水平力が作用した場合の座屈荷重をアーチ両端の開角 $\theta=0^\circ \sim 180^\circ$ に関して示している。ただし、変位の境界条件は、アーチ面内では一端ヒンジ、他端は水平方向に移動可能なローラ支持であり、アーチ面外は両端の変位とねじれ角が拘束されている。アーチの諸元は次の通りである。

$$A=92.88\text{cm}^2, I_y=11363\text{cm}^4, I_z=3871\text{cm}^4, I_{yz}=555869\text{cm}^4, J_s=58.9\text{cm}^4, L=10.244\text{m}, E=200\text{GPa}, G=77.2\text{GPa}$$

## 4. 有限変位解析

有限変位解析には、種々の方法があり主に初期形状を基準にする全Lagrangeの方法や増分後の第 $n$ つり合い状態の形状を基準とする更新Lagrangeの方法があり、それぞれ一長一短がある。全Lagrangeの方法で、精度の良い解析をするためには高次の非線形項まで考慮する必要があるため、この短所を補うために、要素の剛体的な変位を座標変換により表現して、基礎方程式から剛体変位を除去する全Lagrangeの方法がある<sup>3)</sup>。

そこで、剛体変位を除去した全Lagrangeの方法と更新Lagrangeの方法について、前述の変位関数と既往の変位関数を用いた解析を行ない精度と収束性について調べる。

第  $n$  通り合い状態から、次の通り合い状態を求めるときの増分変位の変位関数は、更新Lagrangeの方法では式(1),(2)と同様の式になる。全Lagrangeの方法では、第  $(n+1)$  通り合い状態までの変位関数から、直前の通り合い状態の変位関数の差をとることにより得られる。このとき、並進変位とねじれ率は  $u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u_i$  ( $i=1,2,3$ ),  $\kappa_i^{n+1} = \kappa_i^n + \Delta \kappa_i$  と表されるが、3次元での有限回転については、 $\theta_i^{n+1}$ ,  $\theta_i^n$  と  $\Delta \theta_i$  が次のような式により表されることに注意しなければならない。

$$\theta_i^{n+1} \doteq \theta_i^n + \Delta \theta_i - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \theta_j^n \Delta \theta_k, \quad \Delta \theta_i \doteq -\theta_i^n + \theta_i^{n+1} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \theta_j^n \theta_k^{n+1} \quad (3)$$

ここに、 $\varepsilon_{ijk}$  は Eddington の  $\varepsilon$  である。また、回転量に関する3次以上の項は省略している。

このようにして得られた増分形式の変位関数を変位とひずみの式に代入して、仮想仕事の原理により得られた増分形式の平衡方程式をNewton法により解くことにより有限変位解析が行われる。

図-3, 4 は、変位増分法により、両端固定支持された円弧アーチのクラウンに鉛直下向きの集中荷重を載荷したときの荷重倍率とクラウンのたわみの関係、各増分段階におけるNewton法の反復回数を示している。なお、解析では荷重と構造の対称性を考慮して、片側だけを16要素に分割し、分岐点が生じないように曲げねじれ座屈荷重の1/1000の集中荷重を面外方向に載荷している。アーチの諸元は次の通りである。

$$\gamma = \frac{M}{\sqrt{E I_x B}} \left( \frac{L}{\pi} \right) \quad \beta = G J_x \left\{ \left( \frac{L}{L} \right)^2 E I_y \right. \quad \gamma = \frac{P}{E I_x} \left( \frac{L}{\pi} \right)^2$$

$$EA = 4.0 \times 10^6, \quad EI_y = 1.0 \times 10^6, \\ EI_x = 1.0 \times 10^5, \quad GJ = 1.0 \times 10^5, \\ L = 120, \quad \theta = 120^\circ, \quad P_{cr} = 197.33$$

## 5. あとがき

新しい変位関数<sup>1)</sup>は、図-1, 2より曲線部材の座屈解析が正確に行えることが分かる。図-3より、剛体変位を除去した全Lagrangeの手法の有限変位解析では、既往の変位関数は正しい解析が行われていない。更新Lagrangeの手法では、一般に基礎式が近似的であっても増分区間を狭めることにより解の精度を向上させることができることから、既往の変位関数と新しい変位関数を用いた解は、図の上からは一致しているが、図-4よりNewton法の反復回数については新しい変位関数の方が少なく、収束性が良いことが分かる。

以上より、式(1),(2)の変位関数を用いると、精度や収束性が向上することが分かる。

参考文献 1) 林 正・岩崎英治：幾何学的非線形解析における薄肉曲線材の折れ線近似の妥当性、土木学会論文集、No.392/I-9, 1988. 2) 例えば、Hasegawa, A., Liyanage, K., Ikeda, T. and Nishino, F.: A Concise and Explicit Formulation of Out-of-Plane Instability of Thin-Walled Members, Proc. of JSCE, No.356/I-3, 1985. 3) 前田幸雄・林 正：立体骨組構造物の有限変位解析、土木学会論文報告集、No.253, 1976.

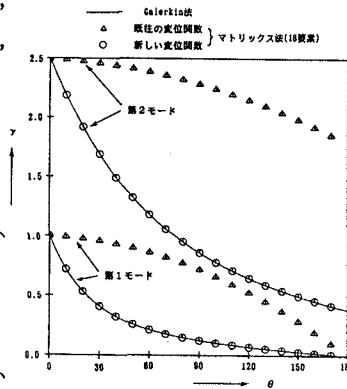


図-1 曲げを受けた円弧アーチの曲げねじれ座屈

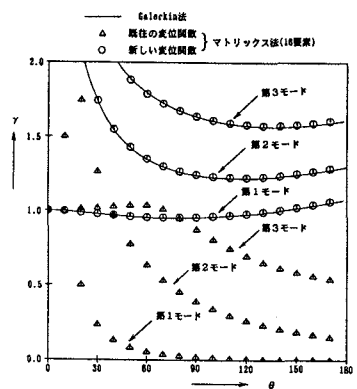


図-2 水平方向力を受けた円弧アーチの曲げねじれ座屈

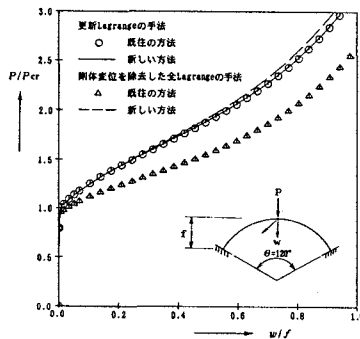


図-3 鉛直荷重を受けた円弧アーチの有限変位解析

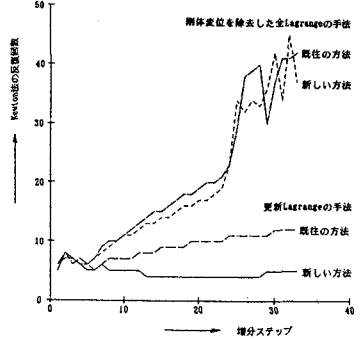


図-4 収束性の比較