

京都大学工学部
京都大学工学部
中部電力

正
正
正

○ 西村直志
小林昭一
神谷泰範

1. 序

正則化された積分方程式法の利用によりクラックの順問題の解析はかなり容易になった。本報ではこの手法によってクラックの位置及び形状を決定する逆問題を解く事を試みる。具体的には、Laplace方程式に支配される2次元クラック問題（例：モードⅢ等方静弾性，静電場など）を取り上げ，境界でのDirichlet, Neumannデータの両方が計測によって与えられたとき，これらと最もよく適合するクラック形状を積分方程式法によって決定する事を考える。

2. クラック形状決定問題

有界領域 D が単一のクラック S （ S 上で $(\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{n})^\pm = 0$ ）を有している事はわかっているが， S の位置及び形状が未知である場合を考える。今 ∂D に複数のDirichletデータ $\mathbf{u}^I$ ， $I = 1 \sim N$ （変位等）を与え，計測により対応するNeumannデータ $\mathbf{q}^I := \partial \mathbf{u}^I / \partial \mathbf{n}$ （traction等）を求めたとする。これらのデータが S 上の斉次Neumann条件の制約の下で境界 ∂D 上の直接法の積分方程式を最小二乗の意味で最もよく満足する様にクラックの位置・形状を決定する。

その様なクラック S に於いては，次式を満たす S 上の関数 φ^I ， λ^I が存在せねばならない。[1]

$$n_i(\mathbf{x})g_{,i}^I(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial s_x} \int_S G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \varphi^I(\mathbf{y})}{\partial s_y} dS_y = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} n_i(\mathbf{x})G_{,i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left\{ f^I(\mathbf{y}) + \int_S G_{,k}(\mathbf{y} - \mathbf{z})n_k(\mathbf{z})\varphi^I(\mathbf{z})dS_z \right\} dS_y \\ & + \frac{\partial}{\partial s_x} \int_S G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \lambda^I(\mathbf{y})}{\partial s_y} dS_y = 0, \quad \mathbf{x} \in S \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_I \frac{\partial \varphi^I}{\partial s_x} \left[t_i(\mathbf{x}) \int_{\partial D} G_{,i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left\{ f^I(\mathbf{y}) + \int_S G_{,k}(\mathbf{y} - \mathbf{z})n_k(\mathbf{z})\varphi^I(\mathbf{z})dS_z \right\} dS_y \right. \\ & \left. + \int_S n_i(\mathbf{x})G_{,i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \lambda^I(\mathbf{y})}{\partial s_y} dS_y \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$- \sum_I \frac{\partial \lambda^I}{\partial s_x} \left\{ t_i(\mathbf{x})g_{,i}^I(\mathbf{x}) + \int_S n_i(\mathbf{x})G_{,i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \varphi^I(\mathbf{y})}{\partial s_y} dS_y \right\} = 0, \quad \mathbf{x} \in S$$

$$\sum_I \text{Sif}(\lambda^I) \text{Sif}(\varphi^I) = 0, \quad \text{on } \partial S \quad (4)$$

ここに， $G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -1/(2\pi) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ，

$$f^I(\mathbf{x}) = \frac{u^I(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} u^I(\mathbf{y}) dS_y - \int_{\partial D} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) q^I(\mathbf{y}) dS_y \quad \text{on } \partial D,$$

$$g^I(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} u^I(\mathbf{y}) dS_y - \int_{\partial D} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) q^I(\mathbf{y}) dS_y \quad \text{on } S.$$

φ^I は I 番目の計測に対応する開口変位， λ^I はクラック上の境界条件に対応するLagrange乗数であり，Sifは応力拡大係数を表す。

3. 数値解析法及び数値結果

クラック形状 S を決定するには適当な初期位置 S から出発して(3),(4) を Newton 法で解けばよいが、その際 $\dot{\varphi}^I, \dot{\lambda}^I$ ($\cdot$ は形状パラメータ、即ち S を離散化した後の節点座標等に関する微分) が必要になる。これらを求めるにはまずあるステップでの S に於て(1),(2) を解き φ^I, λ^I を求める。さらに、(1),(2) に形状パラメータに関する微分を施して得られる $\dot{\varphi}^I, \dot{\lambda}^I$ に関する積分方程式を解いて $\dot{\varphi}^I, \dot{\lambda}^I$ を求めればよい。これらの方程式は正則化する事が出来、特異積分の数値評価は一切必要ない。

ただし上に述べた数値解法は必ずしも十分に robust ではなく、解析の安定の為に種々の工夫が必要である。ここではまずクラックを直線と仮定して十分に収束させた後クラックの形状を記述する節点数を増やし、位置・形状をより詳細に決定する方法を用いた。なお、実用に於いては AE データなどの副次的情報を用いて真のクラック位置の近くに Newton 法の初期位置を取る等の工夫が重要であろう。

以上で述べた方法を用いて実際に数値計算を行なった結果を Fig.1,2 に示す[2]。真のクラックは Fig.1 に示した放物線であり、初期位置は、同図中の直線である。Fig.1,2 は各々クラックを直線に限定した第1段階に於ける収束状況、及び形状の自由度を増やした第2段階の収束状況を示す。

4. 結言

本報の方法は Newton 法に依っているので仮定したクラックの初期位置と真のクラック位置とが離れている場合には収束しない。それ故、例えば必ずしも収束は早くないが robust な非 Newton 法系統の非線形計画法を適用して前処理を行った後、本報の方法を用いて収束を加速する等の工夫を今後検討してゆく予定である。

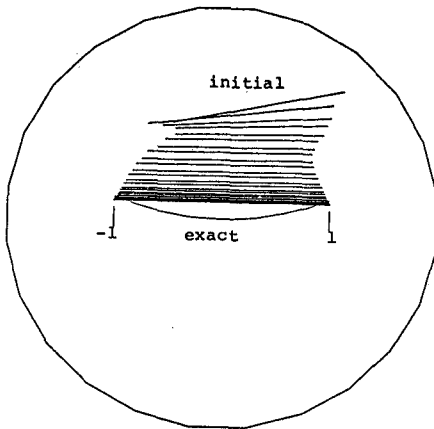


Fig.1

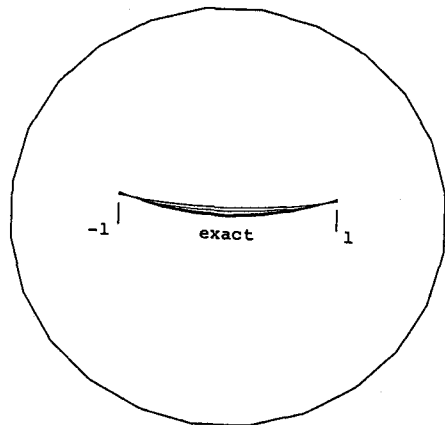


Fig.2

文献

- [1] N.Nishimura: Regularised integral equations in crack shape determination problems, 自由境界値問題とその周辺, 京都大学数理解析研究所講究録, 1990
- [2] 神谷泰範: 積分方程式法によるクラックの形状決定, 京都大学大学院修士論文, 1990