I-6　周期構造の平均弾性の合理的推定について

東北大学　正会員　○堀　宗朗
東北大学　正会員　三浦　尚

１．序

微小構造を持つ不均一材料は、十分大きなスケールでは均一とみなされる。均一化された材料挙動は物理場の体積平均から決定されるが、不均一性間の相互作用に大きく影響される。このような材料の平均弾性を推定する際のモデルとして、同一の微小構造を持つ単位体を無限に規則正しく配列した周期構造が知られている[1]。周期構造では相互作用を正確に解析できるが、それには煩雑な数値計算が必要である。本研究では周期構造の平均弾性をより合理的に解析する方法について報告する。

２．等価周期構造とHashin-Shtrikman変分原理

図1aに示す３次元周期構造Ｖを考える。Ｖの不均一弾性場を$\mathbf{C}'(\mathbf{x})$、変位・歪・応力の物理場を$\{\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}\}$とすると、$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathrm{sym}(\nabla\otimes\mathbf{u})$, $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=0$, $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{C}':\boldsymbol{\varepsilon}$が成立する（ベクトルやテンソルは太字で表される）。この場の式を直接解かずに、アイゲン応力$\mathbf{s}^*$が周期的に分布する等価周期構造V^*を導入する（図1b参照）。V^*の弾性は一様で、$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{s}^*$が成立し、

$$\nabla\cdot\{\mathbf{C}:(\nabla\otimes\mathbf{u})\}+\nabla\cdot\mathbf{s}^*=0 \tag{1}$$

を満たす。$\mathbf{C}':\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\sigma}^*$を満足するアイゲン応力$\boldsymbol{\sigma}^*$は、Ｖと同一の物理場を$V^*$に作る。従って、$\boldsymbol{\sigma}^*$を求めればＶの場の式を解いたことになる。

一様場$\{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^o,\boldsymbol{\varepsilon}^o,\boldsymbol{\sigma}^o\}$と周期場$\{\mathbf{u}^p,\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{\sigma}^p\}$に物理場を分ける。$V^*$の単位体を$U^*$、その境界と法線を$\partial U^*$と$\boldsymbol{\nu}$とする。周期場の$\partial U^*$上の面積分、$\int_{\partial U^*}(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\sigma}^p)\cdot\mathbf{u}^p\,dS=0$、から[1]、Hashin-Shtrikman変分原理が成立することが証明される[2]。すなわち、Ｕの平均弾性を$\bar{\mathbf{C}}$とすると、以下で定義されるアイゲン応力の汎関数Iは$I(\boldsymbol{\sigma}^*)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^o:(\mathbf{C}-\bar{\mathbf{C}}):\boldsymbol{\varepsilon}^o$を満足し、また、$I$の変分は$\delta I(\boldsymbol{\sigma}^*)=0$を満足する。

$$I(\mathbf{s}^*)=\frac{1}{2}\langle\mathbf{s}^*:\{(\mathbf{C}'-\mathbf{C}):\mathbf{s}^*-\boldsymbol{\varepsilon}^p-2\boldsymbol{\varepsilon}^o\}\rangle \tag{2}$$

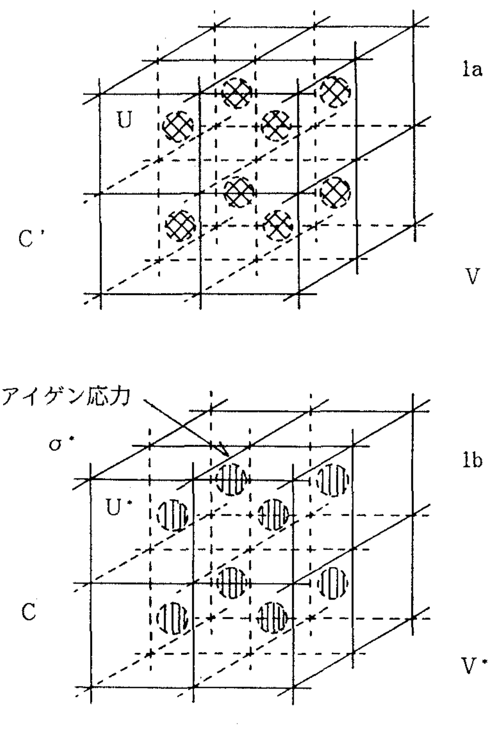

図1: ３次元周期構造

ここで<>はU^*の体積平均である。さらに、V^*の弾性$\mathbf{C}$が$\mathbf{C}'-\mathbf{C}$を正（負）値テンソルにすれば、任意の$\mathbf{s}^*$について不等式、$I(\boldsymbol{\sigma}^*)\leqq(\geqq)\,I(\mathbf{s}^*)$が成立する。従って、適当なアイゲン応力に対する汎関数Ｉの値を計算することで付加的な仮定をせずに周期構造Ｖの平均弾性$\bar{\mathbf{C}}$の上限・下限が与えらえる。

３．１次元周期構造

前章の結論を簡単に示すため、図２に示される１次元周期構造Ｖを考える（支配方程式(1)や(2)で定義される汎関数Ｉに対し、簡単のため物理場をテンソルからスカラーに換える）。Ｖはマトリックスと介在物

Ｉから成り、ＭとＩの弾性をC^MとC^Iとすると、$C'(x) = H(x;M)C^M + H(x;I)C^I$となる。ここでＨは階段関数である。Ｕの範囲を$|x| < 1$、ＩのＵに対する長さの比をｆとする。

一様歪ε^oが作るＶの物理場は、次のように解析的に求まる。応力場は一様で$\sigma(x) = \bar{C}\varepsilon^o$、また歪場は$\varepsilon(x) = \{H(x;M)(C^M)^{-1} + H(x;I)(C^I)^{-1}\}\varepsilon^o$である。ここで、Ｖの平均弾性$\bar{C}$はReussの近似と一致し、

$$\bar{C} = \{(1-f)(C^M)^{-1}+f(C^I)^{-1}\}^{-1} \qquad (3)$$

となる。任意の一様弾性Ｃを持つ１次元等価周期構造V^*に対し、Ｖと同一の物理場を作るアイゲン応力は$\sigma^*(x) = \bar{C}\varepsilon^o - C\varepsilon(x)$として決定される。

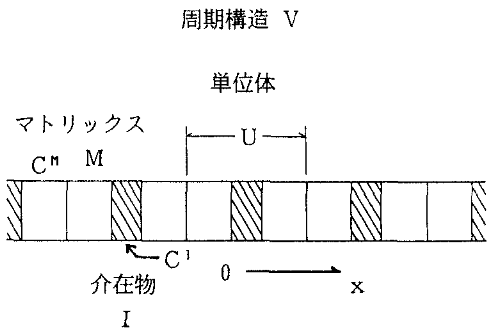

図2: １次元周期構造

汎関数Iを用いて$\bar{C}$の上限・下限値を計算する。C'が階段関数で表わされることから$H(x;I)$を

$$H(x;I) \simeq h(x) = \sum_{n=-N}^{N} \langle H(x;I)\exp(-\iota n\pi x)\rangle \exp(\iota n\pi x) \qquad (4)$$

としてＮ位までフーリエ展開する。ここで、原点についてU^*が対称であれば、複素数exp関数は実数余弦関数で表され鏡像対称分解される[1]ことは明かである。$s^*(x) = (1-h(x))s^M + h(x)s^I$を用いると、汎関数$I$は変数$s^M$と$s^I$に対する次の２次形式に帰着する。

$$I = \frac{1}{2}\langle\{(1-h)s^M+hs^I\}\{(C'-C)\{(1-h)s^M+hs^I\}-\varepsilon^p-2\varepsilon^o\}\rangle \qquad (5)$$

ここで、支配方程式(1)より$\varepsilon^p = -C^{-1}(s^*-\langle s^*\rangle)$である。(4)の与えるｈを(5)に代入すると、$I$の値は簡単に数値計算される。さらに、$s^M$と$s^I$について偏微分を取ることによって任意のＣに対し２次形式の極値は決定できる。

図3に平均弾性$\bar{C}$の、(3)が与える真の値と (5)が与える近似値を示す。ここで、$C^I/C^M = 0.1$として、$C/C^M = 2$（上限）と0.05（下限）の２つのV^*について、$\bar{C}/C^M$を $f = 0$から1まで計算している。フーリエ展開の次数は$N = 10$である。明らかに$C'-C$が正・負の場合$\bar{C}$の近似値は上限・下限を与え、Hashin-Shtrikman変分原理が正しく成立している。小さいＮの値でも精度は十分高いようであり、比較的簡単な数値計算によって周期構造の平均弾性の推定ができることがわかる。

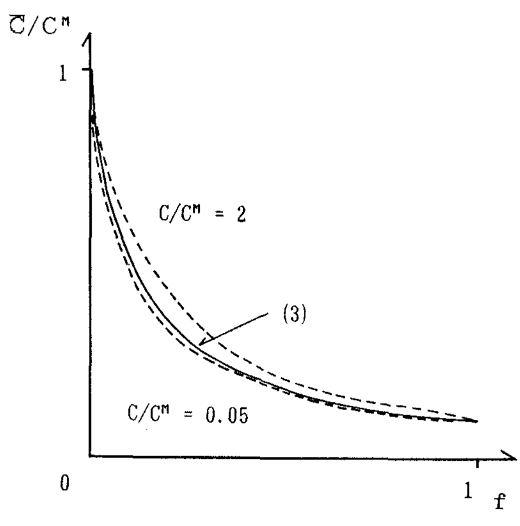

図3: 平均弾性 $\bar{C}$

４．結論

周期構造の平均弾性を推定にHashin-Shtrikman変分原理が適応可能であり、その上・下限が簡単かつ正確に計算可能であることが示された。

５．参考文献

1) 周期構造の基本的性質: 堀　宗朗・三浦　尚，構造工学論文集，V.304，p.353 (1990)

2) A variational approach to the theory of the elastic behavior of polycrystals: Hashin, Z., Shtrikman, J. Mech. Phys. Solids, V.10, p.343 (1963)