

I-5 等方性長円筒の非軸対称熱応力解析

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. まえがき 等方性短円柱或は等方性短円筒の3次元弾性問題に関する研究は、非軸対称変形も含めて、ほぼ峠を越え、最近では、あまり見受けられなくなった。これからの弾性問題は、異方性体に向うものと思われるが、横等方性の様に、取扱いが比較的容易な異方性体もあり、円柱異方性の様に、極めて難解な異方性体もある。3次元弾性問題に極めて近いテーマとして、古くから、熱弾性問題（熱応力問題）があり、多くの研究者によって、広範な研究がなされている。然しながら、3次元弾性問題としても取扱いが複雑な長円筒或は短円筒の非軸対称熱応力は、定常状態或は非定常状態共にあまり研究されていない様である。

本研究は、著者の提案による熱の効果を考慮した3次元弾性問題の解を用いて、等方性長円筒の内面に、非軸対称温度が課せられた定常熱応力を解析するものである。温度場の境界条件は、3次的に厳密に満足されており、応力場の境界条件は、長円筒の特性を利用して、一つが合応力によって満足されている。

2. 温度場 定常状態の熱伝導の方程式は、Laplaceの微分方程式となるので、その解は、 T を温度変化とすれば、次式となる。

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos \beta_n z [S_{mn}^{(1)} I_m(\beta_n r) + S_{mn}^{(2)} K_m(\beta_n r)] + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \cdot (S_{m0}^{(1)} r^m + S_{m0}^{(2)} r^{-m}) \quad (1)$$

ここで、 $\beta_n = n\pi/h$ ($n=1, 2, \dots$)である。Fig.1に示した長円筒の温度場は、 z に関して偶とし、境界条件は、次式を考える。

$$z = \pm h/2 \text{ において、 } \partial T / \partial z = 0 \quad (2 \cdot a)$$

$$r = a \text{ において、 } T = g(\theta, z) \quad (2 \cdot b)$$

$$r = b \text{ において、 } T = 0 \quad (2 \cdot c)$$

ここで、

$$g(\theta, z) = \begin{cases} T_0 \cos \theta & [|z| < d \text{ かつ } 0 \leq \theta \leq 2\pi] \\ 0 & [|z| > d \text{ かつ } 0 \leq \theta \leq 2\pi] \end{cases} \quad (3)$$

長円筒の内面の温度分布 $g(\theta, z)$ が、式(3)の様に与えられた時には、式(1)の変形Bessel関数の次数 m 及び r のべき指数 m は、1と固定できる。式(3)をFourier級数に展開して、式(2・b, c)の境界条件を式(1)に課すると、 T は、次式の様に定められる。

$$T = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} f_n^* \cos \beta_n z [K_1(\beta_n b) I_1(\beta_n r) - I_1(\beta_n b) K_1(\beta_n r)] + \frac{f_0^*}{a} \cos \theta \left(r - \frac{b^2}{r} \right) \quad (4)$$

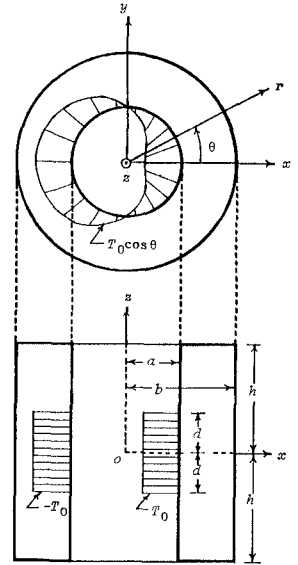


Fig.1 Coordinate system.

ここで、

$$f_n^* = \frac{2T_0 / (n\pi) \sin \beta_n d}{I_1(\beta_n a) K_1(\beta_n b) - I_1(\beta_n b) K_1(\beta_n a)}, \quad f_0^* = \frac{T_0 (d/h) a^2}{a^2 - b^2} \quad (5 \cdot a, b)$$

3. 応力場 著者の提案による熱の効果を考慮した3次元弾性問題の解は、次式となる。

$$2Gu_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_0 \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \quad (6 \cdot a)$$

$$2Gu_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_0 \right] - 2 \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (6 \cdot b)$$

$$2Gu_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_0 \right] + \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (6 \cdot c)$$

ここで、

$$\nabla^2 \phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \psi_0 = 0, \quad \nabla^2 \chi = \alpha E T / (1-\nu) \quad (7 \cdot a \sim e)$$

式(7・e)の χ は、Goodierの熱弾性変位ポテンシャルと呼ばれるものであり、式(4)の T を用いると、次の様に求められる。

$$\chi = -\frac{\alpha E}{4(1-\nu)} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\beta_n} \cos \beta_n z \{ K_1(\beta_n b) r [I_0(\beta_n r) + I_2(\beta_n r)] + I_1(\beta_n b) r [K_0(\beta_n r) + K_2(\beta_n r)] \} \\ + \frac{\alpha E f_0'}{8a(1-\nu)} \cos \theta r (r^2 - 4b^2 \log \frac{r}{a}) \quad \text{----- (8)}$$

他の変位ポテンシャルは、すべて、調和関数であり、次式となる。

$$\phi_0 = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n z [D_n^{(1)} I_1(\beta_n r) + D_n^{(2)} K_1(\beta_n r)], \quad \phi_1 = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n z [F_n^{(1)} I_1(\beta_n r) + F_n^{(2)} K_1(\beta_n r)]; \\ \psi_1 = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n z [E_n^{(1)} I_1(\beta_n r) + E_n^{(2)} K_1(\beta_n r)] \quad \text{----- (9・a～c)}$$

$$\phi_{0,0} = \frac{D_0}{r} \cos \theta - F_0 \cos \theta \left(\frac{r^2}{2} - 2rz^2 \right), \quad \phi_{1,0} = F_0 \cos \theta \left(\frac{r^2}{2} - 2rz^2 \right), \quad \psi_{0,0} = 2(1-\nu) F_0 \sin \theta \left(\frac{r^2}{2} - 2rz^2 \right) \quad \text{----- (10・a～c)}$$

式(8)，(9・a～c)及び式(10・a～c)を式(6・a～c)に代入すると、変位成分の表現が得られる。

それより、ひずみ成分を求め、熱を考慮したHookeの法則を用いると、応力成分の表現が得られる。応力場の境界条件は、内、外側面及び両端面を自由とし、次式を考える。

$$z = \pm h \text{ において, } \sigma_{rz} = 0, \sigma_{\theta z} = 0, T_{zz} = 0 \quad (11・a \sim c)$$

$$r = a \text{ において, } \sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{rz} = 0 \quad (12・a \sim c)$$

$$r = b \text{ において, } \sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{rz} = 0 \quad (13・a \sim c)$$

式(11・a～c)の境界条件は、自明に満足される。式

(12・c)及び式(13・c)の境界条件より、未定定数 $E_n^{(1)}$ 及び $E_n^{(2)}$ を他の未定定数で表し、変位及び応力成分の式から、これらを消去するのが数値計算上好都合である。式(12・a, b)及び式(13・a, b)の境界条件より、基本解の未定定数に関する4元連立1次方程式及び付加解の未定定数に関する2元連立1次方程式が得られ、前者は、数値的に解かれる。

4. 数値計算結果 $b/a = 4.0$ 及び $b/h = 0.5$ の長円筒が、ポアソン比 $\nu = 0.33$ 及び温度分布幅 $d/h = 0.3$ を持つ場合について計算した。級数 n の項数は、最初の36項を用いた。計算結果の一部をFig.2からFig.4に示した。 $\sigma_{\theta\theta}$ は、温度分布の境界で著しい不連続性を示すが、 σ_{zz} は、急激な変化を示すだけで、不連続にはならない様である。

5. あとがき 等方性長円筒の内面に、非軸対称温度が課せられた定常熱応力を解析した。温度場の境界条件が同じであっても、短円筒の場合には、応力場に関する境界条件の一つが異なり、極めて複雑になるが、本研究で取扱った長円筒の場合には、比較的容易に解析でき、しかも厳密解が得られる。円筒の高さ方向に部分的な温度が課せられた場合でも、垂直応力の一つだけが、その分布境界で不連続になるという解析結果は、興味あることと思われる。

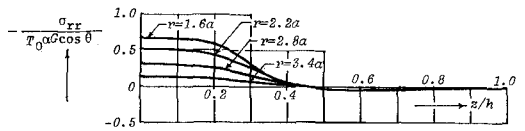


Fig.2 Distribution of σ_{rr} .

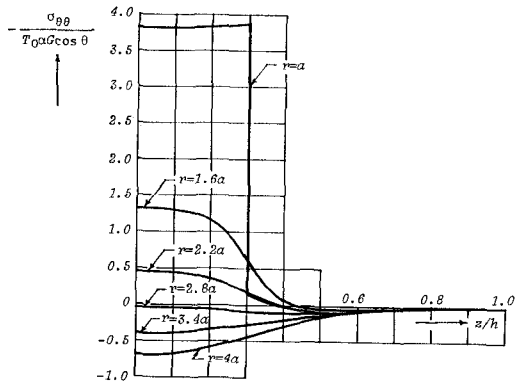


Fig.3 Distribution of $\sigma_{\theta\theta}$.

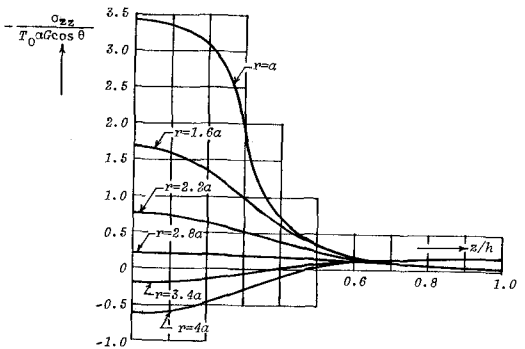


Fig.4 Distribution of σ_{zz} .