

I-4 球状欠陥の多重散乱特性

鹿島建設株式会社 正員 樋江井 夕紀夫
東海大学海洋学部 正員 北原 道弘

1. はじめに

3次元無限弾性体中に近接して存在する複数の欠陥群を想定し、欠陥群の相互影響をも考慮した弾性波の散乱問題を考える。本問題の解析方法としてボルン級数型積分方程式法¹⁾を用いる。ここでは2個の球状欠陥モデルを設定し、その散乱特性を示すと共に、本解法の収束性にも検討を加える。

2. ボルン型解法による散乱問題の定式化

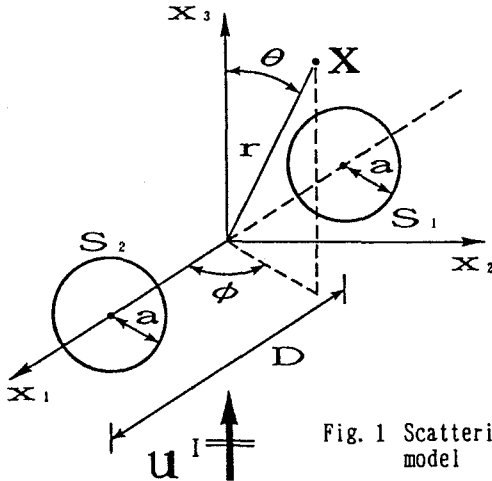


Fig. 1 Scattering model

Fig. 1に示すような2個の球形ボイドモデルを用いて定式化を考える。各ボイド表面 S_1, S_2 の境界条件は、表面力が零： $t=0$ である。このとき、離散化した後の弾性母体に対する境界積分方程式は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 u^I は入射波であり、 u_i は各ボイド表面上の変位である。ここで、ボルン級数による解法を適用するために、式(1)の係数マトリクスを対角項と非対角項に分離して、次式を得る。

$$(A - B) u = u^I \quad (2)$$

ここに、 A, B などは次のようである。

$$A = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -H_{12} \\ -H_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$u = \{u_1, u_2\}^T, \quad u^I = \{u_1^I, u_2^I\}^T$$

ここで、式(2)の両辺に A の逆マトリクス A^{-1} を作用させて、次式を得る。

$$(I - C) u = A^{-1} u^I \quad (4)$$

ここに、 C は次のようである。

$$C = A^{-1} B = \begin{bmatrix} H_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & H_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -H_{12} \\ -H_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

このマトリクス C のノルムが1より小さいとき、式(4)より解 u は次のように求められる。

$$u = (I - C)^{-1} A^{-1} u^I \\ = \sum_{k=0}^{\infty} C^k A^{-1} u^I \quad (6)$$

3. 解析モデル

数値解析においては、Fig. 1に示すように、大きさの等しい球状欠陥が x_1 軸上に並列に存在する場合を考え、入射波は x_3 軸方向に進行するものとした。欠陥の間の距離 D は欠陥の半径 a に対して $D=11a/5$ と設定した。欠陥表面は1個につき56の四角形要素で近似して、一定要素を用いて解析を行った。また以下の解析例には、Fig. 1に示した球座標系を導入している。

4. 数値解析例

Fig. 2とFig. 3はボルン級数の収束性を調べた結果である。収束性を判定するために、 $\|u\|$ と $\|u^k\|$ を次のように定義した。

$$\|u\| = \sum_{\alpha, i} |u_{\alpha i}| / K_f \quad (7a)$$

$$\|u^k\| = \sum_{\alpha, i} |u_{\alpha i}^k| / K_f \quad (7b)$$

$\|u\|$ における $u_{\alpha i}$ は積分方程式法による解(全変位

場)であり、総和は要素 α と変位成分 i に関する和を意味する。 K_i は全自由度 $\alpha \times i$ である。また、 $\|u^k\|$ における $u_{\alpha i}^k$ は式(6)の各項からの寄与 $C^k A^i u^i$ ($k=0,1,\dots,n$)を表す。Fig. 2とFig. 3の横軸は式(6)の各項 k であり、縦軸は次式で表される解に対する級数各項の割合 E^k である。

$$E^k = \|u^k\| / \|u\| \quad (8)$$

Fig. 2は母体と欠陥の弾性係数比をパラメータとして、P波が入射した場合の収束性を調べた結果

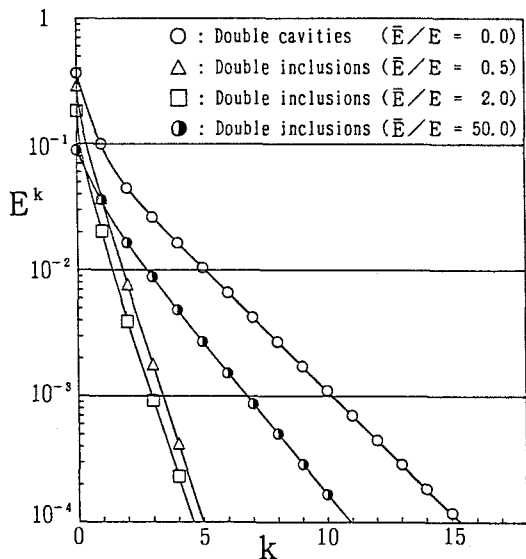


Fig.2 Convergence rate ($ak_L = 1.0$)

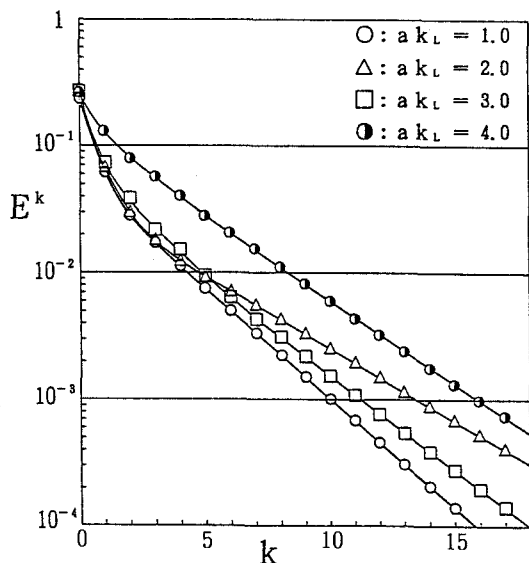


Fig.3 Convergence rate for double cavities

であり、 E が母体のヤング率、 $\bar{E}$ が欠陥のヤング率である。Fig. 3はボイド状欠陥の場合について、入射平面P波の無次元化波数 ak_L をパラメータとして、ボルン級数の収束性を調べた結果である。

Fig. 4とFig. 5は、遠方の散乱場の放射パターンを球座標成分で示している。計算点の半径 r は欠陥の半径 a に対して $r/a=50$ と設定している。

Fig. 4は1個のボイドの場合について、 $M = \max\{|u_\theta^S|, |u_\phi^S|\}$ としたときの $|u_\theta^S|/M$ を示している。同様にFig. 5は、2個のボイドの場合について、 x_1-x_3 平面内(Fig.1参照)の $|u_\theta^S|/M$ を示している。

参考文献 1) 樋江井, 北原; 3次元弾性波動問題におけるボルン級数型積分方程式法の収束性の検討, 土木学会第44回年次学術講演会講演概要集, I-77, 1989年.

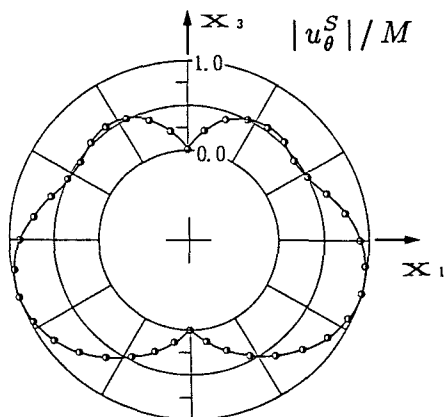


Fig.4 Radiation pattern for single cavity at $ak_L = 1.0$

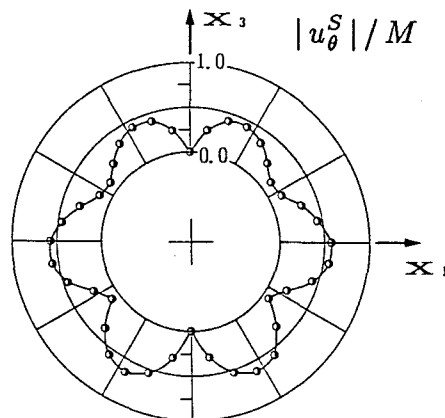


Fig.5 Radiation pattern for double cavities at $ak_L = 1.0$