

I-3

半無限体に接合された弾性薄層内の
軸対称転位による応力, 変位

松江工業高等専門学校 正員 浜野浩幹
ノースウェスタン大学 村外志夫
山梨大学工学部 正員 平島健一

1. 緒言

異種材料の接合境界あるいは材料内部にクラックや一般的な転位が存在する問題は新素材開発や材料試験に関連して重要な課題である。これらに関して従来からかなりの数の論文が発表されているが、ここでは層状性の半無限体を対象とし、層内に一般的な軸対称性の転位やクラックならびにそれらの転位が堆積した場合の応力, 変位分布を積分方程式で提示し、具体的な幾つかの場合について数値解析を実施した。ここでの取り扱いが軸対称の仮定のもとに最も一般的であって、表面あるいは層内、層境界に軸対称性の直応力, せん断応力の作用ならびに軸方向変位, 半径方向変位の一定あるいは線形変位の喰い違い (一般的な転位) が生じた場合に対しての定式化がなされる。なお、各層および半無限体の弾性定数は異なった任意の値をとることができるようになっている。

2. 理論式および境界条件

図1に示したように、等方性の半無限弾性体の表層部に弾性定数の異なる二層の薄膜層が完全接着状態で配置され、それらの接合境界において図示のような転位あるいは作用荷重が存在する問題を考える。ここでは軸対称問題に限定して取り扱うものとすれば、任意位置における変位, 応力は Papkovitch-Neuber の関数 $\phi_k(r, z), \psi_k(r, z)$ を用いて次式のようにあたえられる。

$$u_r^{(k)} = -\frac{1}{2\mu_k} \left\{ \frac{\partial \phi_k}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_k}{\partial r} \right\}, \quad u_z^{(k)} = -\frac{1}{2\mu_k} \left\{ (3-4\nu_k)\psi_k - \frac{\partial \phi_k}{\partial z} - z \frac{\partial \psi_k}{\partial z} \right\}, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^{(k)} &= 2(1-\nu_k) \frac{\partial \psi_k}{\partial z} - \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z^2}, \\ \sigma_r^{(k)} &= 2\nu_k \frac{\partial \psi_k}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\phi_k + z\psi_k), \quad \sigma_\theta^{(k)} = 2\nu_k \frac{\partial \psi_k}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\phi_k + z\psi_k), \\ \tau_{rz}^{(k)} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-2\nu_k)\psi_k - \frac{\partial \phi_k}{\partial z} - z \frac{\partial \psi_k}{\partial z} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\nabla^2 \phi_k = 0, \quad \nabla^2 \psi_k = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3)$$

ここに、 μ_k, ν_k ($k=0, 1, 2$) は各層のせん断弾性係数とポアソン比である。

次に、この系を満足する境界条件は次のように与えられる。

$$(a) \quad z = 0, \quad 0 < r < \infty \quad \text{において} \\ u_z^{(0)} = u_z^{(1)}, \quad u_r^{(0)} = u_r^{(1)}, \quad \sigma_z^{(0)} - \sigma_z^{(1)} = p_1(r), \quad \tau_{rz}^{(0)} - \tau_{rz}^{(1)} = p_2(r), \quad (4)$$

$$(b)_1 \quad z = -h_1, \quad a < r < \infty \quad \text{において} \\ u_z^{(1)} = u_z^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}, \quad (5)$$

(b)₂ $z = -h_1, 0 < r < a$ において

$$\left. \begin{aligned} u_z^{(1)} - u_z^{(2)} &= q_1(r), \\ u_r^{(1)} - u_r^{(2)} &= q_2(r), \\ \sigma_z^{(1)} &= \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(c) $z = -h, a < r < \infty$ において

$$\sigma_z^{(2)} = S_1(r), \quad \tau_{rz}^{(2)} = S_2(r). \quad (7)$$

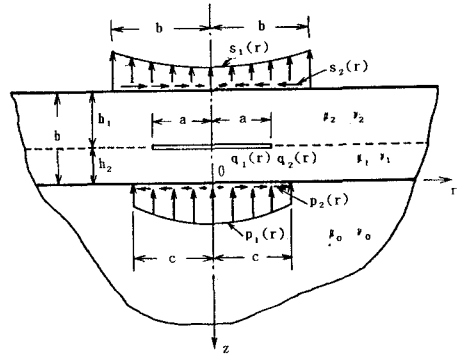


図1. Dislocation.

上式中の $p_j(r), q_j(r)$ および $s_j(r)$ は座標 r の任意関数であり、転位および外荷重の大きさを表わす。

この境界条件に対して式(1),(2)を代入して計算すると関数 $\phi_k(r, z), \psi_k(r, z)$ に含まれる未知係数に関する10元の連立一次方程式が得られる。

3. 数値計算例

連立方程式を解く場合その未知係数は λ の関数となるため、個々の λ を設定して求める必要がある。ここでの計算では層厚 h を基準として $0 \leq \lambda \leq 3h$ においては $\Delta \lambda = h/200$, $3h < \lambda \leq 10h$ においては $\Delta \lambda = h/100$, $10h < \lambda \leq 40h$ においては $\Delta \lambda = h/30$ のように分割した個々の λ を用いて未知係数を決定し、和分近似して数値計算を実行した。計算精度の検証は上表面での荷重条件、接合境界における設定した応力、変位の連続条件の満足度によって判定した。

数値計算例として層1,2の境界に転位がある場合の変位を図2に、応力を図3に示す。縦軸に変位あるいは応力を取り、横軸には z 軸からの距離 r と薄膜層の厚さ h の比を取った。計算に使用したそれぞれの層の弾性定数等は図に示す。また、図2における Γ は 1.0, 2.0, 10.0, 100.0 の場合について計算した。

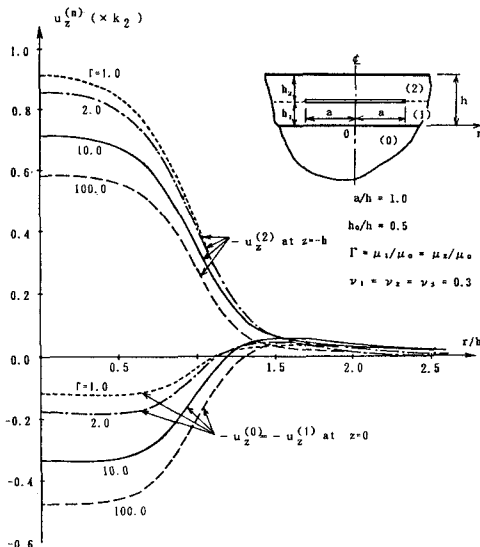


図2. 変位.

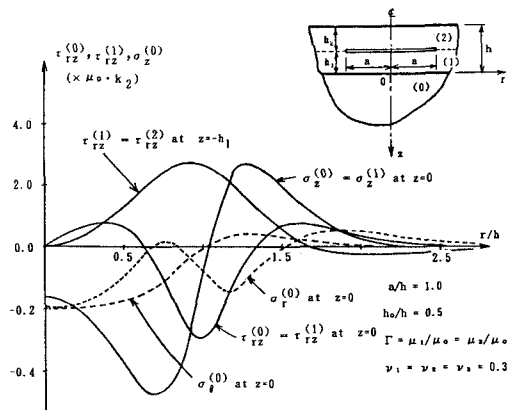


図3. 応力.

4. 参考文献 1) K. Arin & F. Erdogan, "Penny-shaped crack in an elastic layer bonded to dissimilar half spaces", Int. J. Eng. Sci., Vol. 9 (1971), pp. 213-232. 2) N. J. Salamon & J. Dundurs, "Elastic Fields of a dislocation loop in a two-phase material", Journal of Elasticity, Vol. 1 (1971), pp. 153-164.