

I-2

円形・楕円形の剛体 Inclusion または Cavity を有する問題の解析解

金沢大学大学院 学生員 木村清和
山梨大学工学部 正 員 平島健一
金沢大学教育学部 広瀬幸雄

1. まえがき

二次元平面状態下の領域の有限位置に集中力、集中偶力、点転位等の特異荷重 (擾乱) が作用した場合の標題の問題の解析解は工学的な各種の問題を解くのに重要な役割をはたすものであり、その正しい解の検討と基本的な力学的特性を調べておくことは今後の利用に際しても必要である。現在までに、それらの解析解は Dundurs & Mura (1964), List (1969), Vitek (1976), 村上 (1977), Santare & Keer (1986), Chen & Cheung (1987) および Miller & Young (1987) らの研究者によって部分的に報告されているが、次節でみるようにそれらの解の間には各種レベルの差異が認められる。ここでは、それらを統一的に整理し筆者らの結果も含めて相互の関連性について比較検討することを目的とす。

2. 従来までに求められた解析解

Fig.1 のように楕円形境界 L を有する実領域を複素平面 $z=x+iy$ とし、この z 平面を ξ 平面に写像する写像関数を $\omega(\xi)$ とする。境界 L の外部領域の点 Z_0 に図中に示したような集中力、転位等が作用した場合の曲線座標系 (ξ, η) における任意点の応力、変位は次式で求められる。

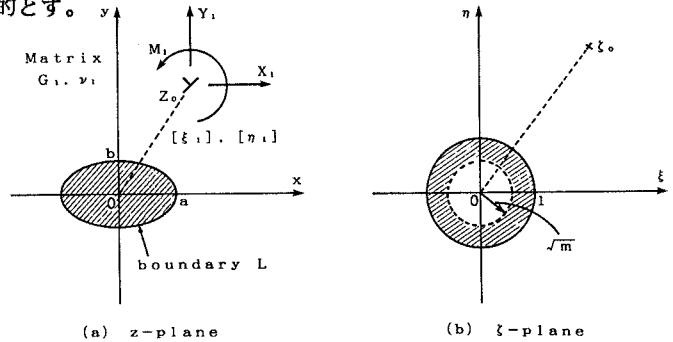


Fig. 1

$$\left. \begin{aligned} u_{\xi} - \zeta u_{\eta} &= (u_x - \zeta u_y) e^{i\varphi} = \frac{1}{2G} \{ \kappa \Phi(\zeta) - \{ \overline{\omega(\zeta)} \cdot \Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta) \} \} e^{i\varphi} \\ \sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2\zeta \tau_{\xi\eta} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2\zeta \tau_{xy}) e^{2i\varphi} = 2 \{ \overline{\omega(\zeta)} \cdot \Phi^{II}(\zeta) + \Psi^{II}(\zeta) \} e^{2i\varphi} \\ \sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} &= \sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \{ \Phi^I(\zeta) \} \quad , \quad e^{i\varphi} = \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \quad , \quad e^{2i\varphi} = \frac{\xi}{\bar{\xi}} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}} \quad . \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 G, ν はせん断弾性係数、ポアソン比、 $\kappa=3-4\nu$ (平面ひずみ) $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ (平面応力) である。上式を基本式として各研究者によって用いられた文字記号および求められた複素ポテンシャル等を一覧表としたものが Table 1 (a)~(d) である。各研究者の間で若干の差異ないし間違い等が認められる。Fig.2 は集中力 x_1 が作用した場合の孔周縁における応力 σ_{η} の分布図の一例を示したものである。

参考文献:

- Chen, YZ & Cheung, YK (1987) : Eng. Fract. Mech., Vol. 26, pp. 729-739.
Dundurs, J. & Mura, T. (1964) : J. Mech. Phys. Solids, Vol. 12, pp. 177-189.
List, RD (1969) : Proc. Comb. Phil. Soc., Vol. 65, pp. 823-830.
Miller, GR & Young, RP (1987) : J. Appl. Mech., Vol. 54, pp. 738-740.
村上敬宣 (1977) : 日本機械学会論文集 (第一部) 第43巻, 370号, pp. 2022-2031. Santare, MH & Keer, LM (1986) : J. Appl. Mech., Vol. 53, pp. 382-385. Vitek, V. (1976) : J. Mech. Phys. Solids, Vol. 24, pp. 263-275.

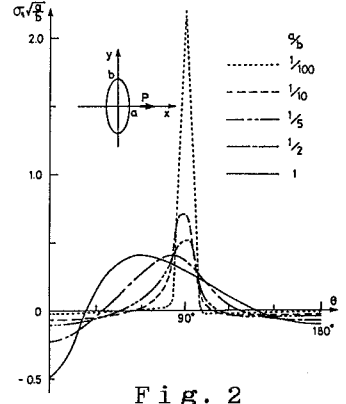


Fig. 2

Table 1 (a) 各著者による特異項表示記号の相互関係(円孔・楕円孔)

著者名	特異項の係数	集中力とdislocations (その1)	著者らの記号との関係	集中力とdislocations (その2)	著者らの記号との関係	集中力と dilatation	(回転)
(1) 著者ら (1969年)	$M = \frac{1}{2\pi\kappa(1+\nu)} [6G(1-\nu)(1+\kappa) + 4G(1-\nu)]$	—	—	$N = \frac{1}{2\pi\kappa(1+\nu)} [6G(1-\nu)(1+\kappa) + 4G(1-\nu)]$	—	$R = K + i \frac{H}{2\pi}$	$1 - \frac{G_0}{4\kappa(1+\nu)}$
(2) Miller et al (1967年)	$A = \frac{\mu(1+b_1+b_2)}{1+\kappa(1+\nu)}$	$\frac{K+Y}{2\pi(1+\nu)}$	$= N$	$B = \frac{\mu(1-\nu)(1+\nu)}{1+\kappa(1+\nu)}$	$= N$	—	—
(3) List (1969年)	$C = \frac{\mu(b_1+b_2)}{\pi(1+\nu)}$	$\frac{K+Y}{2\pi(1+\nu)}$	$= N$	$D = \frac{\mu(b_1+b_2)}{\pi(1+\nu)}$	$= N$	—	—
(4) 村上 (1977年)	$H = \frac{1-\nu}{8\pi} (K+Y)$	$\frac{K+Y}{2\pi(1+\nu)}$	$= N$	$N = \frac{3-\nu}{8\pi} (K+Y)$	$= N$	—	—
(5) Vittek (1976年)	$r = \frac{G}{4\kappa(1+\nu)} \left[(1+\frac{b_1}{2\pi}) + (1+\frac{b_2}{2\pi}) - (1+\frac{b_3}{2\pi}) \right]$	$\frac{H}{1-\nu}$	$= N$	$\delta = \frac{1}{2\pi} (F-iF)$	$= N$	—	—

a1: $b_1 + ib_2$ と 2π について $a_1 = -b_1 + ib_2$ が正しい。

a2: K' (K' の実数部) は Table A に示したように center of dilatation を表す。

Table 1 (d) 楕円形剛体Inclusion問題 (Perfect Bond Interface)

著者名	著者ら (1969年)	Santare & Keer (1966年)
γ	$f_n(\zeta - \zeta_0) + \frac{1}{\kappa_1} f_n(1 - \frac{1}{\zeta_0}) + \kappa_1 R_0$	$f_n(\zeta - \zeta_0) + \frac{1}{\kappa_1} f_n(1 - \frac{1}{\zeta_0}) + \kappa_1 R_0$
$\bar{\gamma}$	$\frac{1}{\kappa_1} \frac{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)}{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)} \frac{1}{\kappa_1} \frac{1}{\zeta_0^*}$	$\frac{1}{\kappa_1} \frac{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)}{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)} \frac{1}{\kappa_1} \frac{1}{\zeta_0^*}$
$\tilde{(\partial_0)}$	$\frac{2G R_0}{\kappa_1} \frac{1}{\zeta}$	$\frac{2G R_0}{\kappa_1} \frac{1}{\zeta}$
$\bar{K}$	$\frac{1}{\kappa_1} \frac{1}{1 - \frac{1}{\zeta_0} - \frac{1}{\zeta_0^*}}$	—
γ	$\frac{\zeta_0(\zeta_0^* - \zeta_0)}{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)} \frac{1}{\kappa_1} \frac{1}{\zeta_0^*}$	$\frac{\zeta_0(\zeta_0^* - \zeta_0)}{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)} \frac{1}{\kappa_1} \frac{1}{\zeta_0^*}$
$\bar{\gamma}$	$f_n(\zeta - \zeta_0) + \kappa_1 f_n(1 - \frac{1}{\zeta_0}) + \frac{1}{\kappa_1} \frac{1}{\zeta_0^*} (1 + \frac{\zeta_0^*}{\zeta_0})$	$f_n(\zeta - \zeta_0) + \kappa_1 f_n(1 - \frac{1}{\zeta_0}) + \frac{1}{\kappa_1} \frac{1}{\zeta_0^*} (1 + \frac{\zeta_0^*}{\zeta_0})$
$\tilde{(\partial_0)}$	$\frac{2G R_0}{\kappa_1} \frac{1}{\zeta}$	$\frac{2G R_0}{\kappa_1} \frac{1}{\zeta}$
$\bar{K}$	$\frac{1}{\omega'(\zeta_0)} \cdot \frac{1}{\zeta - \zeta_0}$	—

$\gamma = \frac{G_0(1+\nu)}{1+\kappa(1+\nu)}$, $K = K + i \frac{H}{2\pi}$, $\kappa_1 = \frac{3-\nu_1}{1-\nu_1}$, (∂_0) : rigid inclusion の relation
 γ は N の dilatation 係数を表したもので,
 $\bar{\gamma}$ は N の dilatation 係数を表したもので,
 $\tilde{(\partial_0)}$: rigid inclusion の dilatation 係数を表したもので,
 $\bar{K}$: rigid inclusion の dilatation 係数を表したもので,
 $\omega'(\zeta_0) = \frac{G_0(1+\nu)}{1+\kappa(1+\nu)}$ の実数部である。

・剛体剛体: 剛体 (剛体) の dilatation 係数を表したもので,

Table 1 (b) 自由境界の楕円孔問題

著者名	著者ら (1969年)	村上 (1977年)	Vitek (1976年)
特異項の係数その他	—	—	—
写像関数 $\omega(\zeta)$	$\frac{G(\zeta + \frac{1}{\zeta_0})}{2}$	$\frac{G(\zeta + \frac{1}{\zeta_0})}{2}$	$R(\zeta + \frac{1}{\zeta_0})$
M	$\frac{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)}{(1 - \nu_0^2)(\zeta_0 - \zeta_0^*)} \frac{1}{\zeta_0^*}$	$\frac{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)}{(1 - \nu_0^2)(\zeta_0 - \zeta_0^*)} \frac{1}{\zeta_0^*}$	$\frac{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)}{(1 - \nu_0^2)(\zeta_0 - \zeta_0^*)} \frac{1}{\zeta_0^*}$
$\bar{M}$	$-f_n(1 - \frac{R^2}{\zeta_0^2})$	$-f_n(1 - \frac{R^2}{\zeta_0^2})$	$-f_n(1 - \frac{R^2}{\zeta_0^2})$
N	$f_n(\zeta - \zeta_0)$	$f_n(\zeta - \zeta_0)$	$f_n(\zeta - \zeta_0) - f_n(1 - \frac{R^2}{\zeta_0^2})$
$\bar{N}$	0	0	$-\frac{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)}{(1 - \nu_0^2)(\zeta_0 - \zeta_0^*)} \frac{1}{\zeta_0^*}$
$K, \bar{K}$	$\frac{1}{\omega'(\zeta_0)} \cdot \frac{1}{\zeta - \zeta_0}$	—	—
L	$\frac{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)}{(1 - \nu_0^2)(\zeta_0 - \zeta_0^*)} \frac{1}{\zeta_0^*}$	—	—
$\bar{L}$	$\frac{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)}{(1 - \nu_0^2)(\zeta_0 - \zeta_0^*)} \frac{1}{\zeta_0^*}$	—	—

a1: $\alpha = \frac{G}{2} (R + \frac{1}{R})$, $\delta = \frac{G}{2} (R - \frac{1}{R})$, $R = \sqrt{(\alpha + b)/(\alpha - b)}$

a2: $R = \frac{1}{2} (\alpha + b)$, $m = (\alpha - b)/(\alpha + b)$

a3: $A = \frac{(\zeta_0^* - \zeta_0)(\zeta_0 - 1/\zeta_0^*)}{(1 - \nu_0^2)(\zeta_0 - \zeta_0^*)} \frac{1}{\zeta_0^*}$