土木学会第45回年次学術講演会（平成２年９月）

Ⅰ-1　逐次高次化手法による動的な平板理論の定式化と特性

福島工業高等専門学校　正　員　根岸嘉和
山梨大学工学部　正　員　平島健一
山　梨　県土木部　正　員　内藤浩史

1 緒　言

著者らは先に、逐次近似型の動的平板理論ならびに漸近展開法に基づく高次平板理論[1),2)]の総合的な位置づけを目指して、幾つかの試み[3),4)]を行ってきた。本報告ではそれらの結果を踏まえ、逐次高次化手法を用いた定式化における、伸縮挙動の面外慣性項の採用の仕方を変えた上で、曲げ、伸縮ともさらに高次の理論式を誘導し、それらの理論特性、精度特性について検討を加える。

2 理論式の誘導

Fig.1 に示すように動的横荷重を受けた平板の挙動を (1)曲げ挙動と (2)伸縮挙動に分解し、各状態ごとに物理量の板厚方向分布の対称性･逆対称性を考慮し、上下表面の応力境界条件(S.B.C)を満足させながら、三次元弾性論の基礎式を用いて、逐次高次の理論式を誘導していく。この定式化手順は曲げ、伸縮ともに Fig.2 の流れ図で与えられるが、ここでは定式化の出発点となる初期値を、双方の場合についてともに $\varepsilon_{zz}^{(0)}=0,\ \sigma_{\alpha z}^{(0)}=0,\ \sigma_{zz}^{(0)}=0\ ;(\alpha=x,y)$. と設定することによって、自由表面を有する平板の動的支配式を誘導した。また、ここでは先の報告[3),4)]の手法とは異なり、伸縮挙動の場合の面外慣性項を、次の段階の変位を用いて与えている。この結果、曲げ挙動の１次理論は Germain-Lagrange の動的な古典平板曲げ理論に、伸縮挙動の１次理論は Poisson の薄板の伸縮運動理論にそれぞれ一致し、高次理論が、これらの古典理論解を補正する理論（但し、高次板厚モードの解析は行えない）として導かれた。

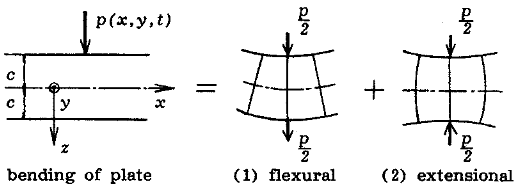

Fig.1　Decomposition of dynamic behavior of plate.

なお、以上の流れに従う理論式の誘導には、２通りの方法が可能である。その第１は、各段階で求まる面外応力を、そのままの形で用いて、次の段階の物理量を求めていき、所定の次数の理論式まで求めた時点で、初めて(S.B.C)を用いて支配式を定式化するものであり、第２は、各段階ごとに、(S.B.C)を満足させることによって、その段階で生起した変位係数が満たすべき関係式を求め、これらを逐次代入しながら所定の次数の支配式まで導くものである。ここでは、前者を総括求積型(Gn)理論、後者を段階求積型(Sn)理論と呼び両者の差異についても検討する。

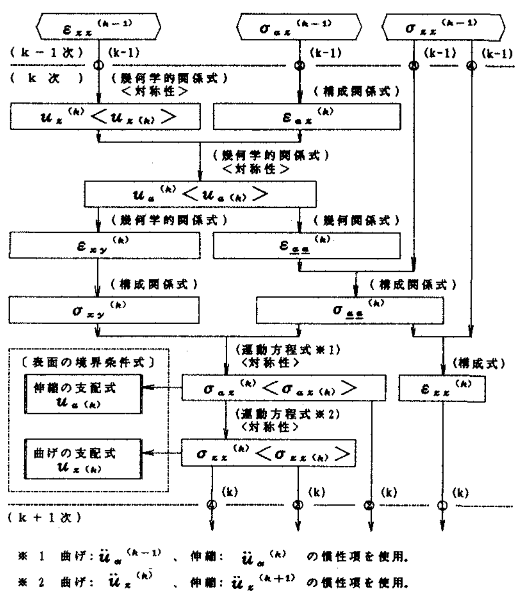

Fig.2　Flow chart for deduction of present theory.

このようにして得られた支配運動方程式を、平面調和波の解析（数値計算例に示す）のために一方向板の場合に特殊化し、その低次(n=1,2,3)のものを示せば次式のようである。

総括求積型（Gn）理論

曲げ挙動

$$\sum_{k=1}^{n} D_k u_{x(n+1-k)} = 0$$

$$D_1 = c^4\left\{\partial_x{}^4 + \frac{3(1-\nu)}{2c^2}\frac{\rho}{G}\partial_t{}^2\right\}$$

$$D_2 = \left(\frac{c^6}{10}\right)\left\{\frac{(8-3\nu)}{(1-\nu)}\partial_x{}^6 - \frac{5(2-\nu)}{2c^2}\frac{\rho}{G}\partial_x{}^2\partial_t{}^2\right\}$$

$$D_3 = \left(\frac{c^8}{1680}\right)\left\{\frac{(1166-960\nu+214\nu^2)}{(1-\nu)^2}\partial_x{}^8\right.$$

$$\left.-\frac{21(61-36\nu-\nu^2)}{(1-\nu)c^2}\frac{\rho}{G}\partial_x{}^4\partial_t{}^2 + \frac{210(1-2\nu)}{c^4}\frac{\rho^2}{G^2}\partial_t{}^4\right\}$$

伸縮挙動

$$\sum_{k=1}^{n} D_k u_{x(n+1-k)} = 0$$

$$D_1 = c^2\left\{\partial_x{}^2 - \frac{(1-\nu)}{2}\frac{\rho}{G}\partial_t{}^2\right\}$$

$$D_2 = -\left(\frac{c^4}{6}\right)\left\{\frac{(2+\nu)}{(1-\nu)}\partial_x{}^4 - \frac{(4-3\nu+\nu^2)}{2(1-\nu)}\frac{\rho}{G}\partial_x{}^2\partial_t{}^2\right.$$

$$\left.+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\rho^2}{G^2}\partial_t{}^4\right\}$$

$$D_3 = \left(\frac{c^6}{120}\right)\left\{\frac{(13+4\nu+13\nu^2)}{(1-\nu)^2}\partial_x{}^6\right.$$

$$-\frac{(30-29\nu+45\nu^2-\nu^3)}{2(1-\nu)^2}\frac{\rho}{G}\partial_x{}^4\partial_t{}^2$$

$$\left.+\frac{(21-45\nu+44\nu^2-4\nu^3)}{4(1-\nu)^2}\frac{\rho^2}{G^2}\partial_x{}^2\partial_t{}^4 - \frac{(1-\nu)}{2}\frac{\rho^3}{G^3}\partial_t{}^6\right\}$$

段階求積型（Sn）理論

曲げ挙動

$$c^4\partial_x{}^4 u_{x(n)} = \sum_{k=1}^{n} D_{tk} u_{x(n+1-k)}$$

$$D_{t1} = -(1-\nu)\left(\frac{3c^2}{2}\right)\frac{\rho}{G}\partial_t{}^2$$

$$D_{t2} = (17-7\nu)\left(\frac{c^4}{10}\right)\frac{\rho}{G}\partial_x{}^2\partial_t{}^2$$

$$D_{t3} = -(422-424\nu-33\nu^2)\left(\frac{c^4}{700}\right)\frac{\rho^2}{G^2}\partial_t{}^4$$

伸縮挙動

$$c^2\partial_x{}^2 u_{x(n)} = \sum_{k=1}^{n} D_{tk} u_{x(n+1-k)}$$

$$D_{t1} = (1-\nu)\left(\frac{c^2}{2}\right)\frac{\rho}{G}\partial_t{}^2 \qquad D_{t2} = -\nu^2\left(\frac{c^4}{12}\right)\frac{\rho^2}{G^2}\partial_t{}^4$$

$$D_{t3} = \frac{\nu^2(6-10\nu+3\nu^2)}{(1-\nu)}\left(\frac{c^6}{360}\right)\frac{\rho^3}{G^3}\partial_t{}^6$$

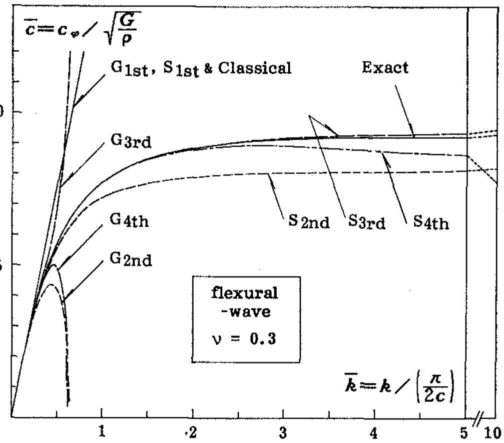

Fig. 3 Phase velocity of flexural waves in infinite plates.

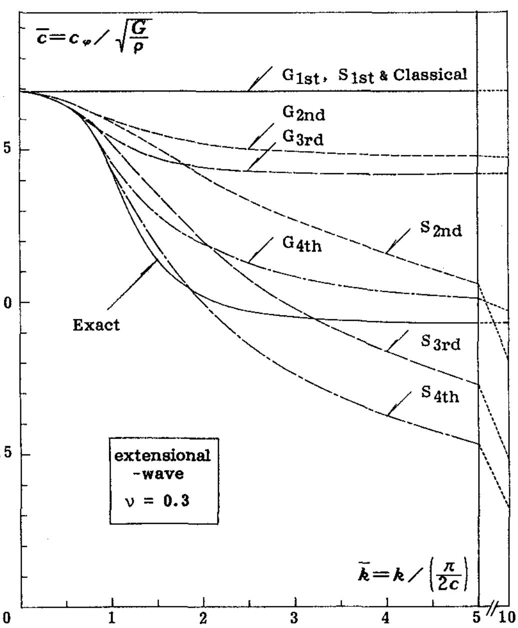

Fig. 4 Phase velocity of extensional waves in infinite plates.

3 **数値計算例**　各次数(n=1~4)の理論式において各変位係数を等置したものを用い、無限板中を伝播する平面調和波（波数k、位相速度c_φ）の分散解析を行った結果をFig. 3とFig. 4に示す。それらより、曲げの場合に段階求積型の高次理論(漸近展開法理論[1),2)]に一致)が良好な解を与える以外は、全般に精度が低いこと、段階求積型(Sn)理論の方が総括求積型(Gn)理論に比べ、やはり良好な精度を示すこと等が判明した。

参考文献　1) Zade, M. I. G. :"Asymptotic analysis of three-dimensional dynamic equations of a thin plate", PMM, Vol. 38, No. 6, pp. 1072-1078, 1974.　2) Niordson F. I. :"An asymptotic theory for vibrating plates", Int. J. Solids Structures, Vol. 15, pp. 167-181, 1979.　3) 根岸・平島：土木学会第44回年次学術講演会概要集, pp. 210-211, 1989.　4) 根岸・遠藤：平成元年度東北支部技術研究発表会講演概要, pp. 20-21, 1990.