土木学会第45回年次学術講演会（平成２年９月）

PSⅠ－１

非線形つり合い経路に関する一繰返計算法

法政大学　正会員　○阿井 正博
東京大学　正会員　　西野 文雄

１．はじめに

部分修正による改良Newton-Raphson法、および接線剛性とその剛性微分マトリックスを用いた繰返計算を組み合わせて、特異状態を２位の速さで決定しながら非線形つり合い経路を求めてゆく計算手順が既に示されている[1]。一方で、接線剛性の行列式の符号に注目した修正係数の変更条件を付加するだけで、部分修正法単独で特異状態が１位の速さで決定できることが、変位法ケーブル構造系について示されている[2]。ここでは、離散化弾性系一般に対する後者による計算手順とその有効性について考える。

２．部分修正法による繰返計算

離散化弾性系での節点位置ベクトル x に対する全ポテンシャル、節点力ベクトルおよび接線剛性マトリックスを、それぞれ W(x), F(x), [k(x)] と表す。ここで、安定域にある既知の初期節点位置 x_0 での $F_0=F(x_0)$ と所定の外力ベクトル $\bar{P}$ を結ぶ線形経路：

$$P(\rho)=(1-\rho)F_0+\rho\bar{P},\quad 0\leqq\rho\leqq1 \;\ldots\ldots\; (1)$$

に対するつり合い経路 x(ρ) にそって、特異点を確定しながら、$\bar{P}=F(x^*)$ を満たす最終つり合い状態 x^* を求める問題を考える。

（ａ）外力増減方向の部分修正法.－ F-x 関係での接線剛性までの微係数を用いて（行列式は使うが、固有値問題は展開しない）

$$x_{[i+1]}=x_{[i]}-\theta_{[i]}[k]_{[i]}^{-1}\Delta F_{[i]} \;\ldots\ldots\; (2)$$

ここに、$\theta_{[i]}$：$0<|\theta_{[i]}|\leqq1$ の修正係数
$\Delta F_{[i]}=F_{[i]}-P$：不つり合い力

の形の部分修正法を基本として以上の問題を解くものとする。このとき、$0<\theta_{[i]}\leqq1$ とすれば、1つの正則域での荷重増加方向への計算となるが、ここでは、安定・不安定域での一貫した適用として荷重増減両方向へ制御するために、負の値もとる。式(2)は、誤差ベクトル $\Delta F_{[i]}$ に対してその一部である $\theta_{[i]}\Delta F_{[i]}$ のみを増減方向に修正しようとするものであり、$[k]_{[i]}$ が特異でない限り、$\theta_{[i]}$ の絶対値が小さい程 1 に対する $\theta_{[i]}$ だけの修正という意味でより正確になる。絶対値の十分小さい $\theta_{[i]}$ に対しては $F_{[i]}$ は経路(1)にそって進む傾向にあるが[1]、実用的な大きさの $\theta_{[i]}$ に対して経路(1)に十分近いことを保持することは、特に特異点まわりでは難しい。これへの対処として、ここでは後述の（ｃ）の経路にのせるための繰返計算を併用している。

修正式(2)において各回の $\theta_{[i]}$ をどのように具体的に定めるかが問題となる。十分小さい絶対値をとれば、部分修正の意味で確実となるが、全体の繰返し回数が不必要に多くなる。また、誤差は修正量 $\theta_{[i]}\Delta F_{[i]}$ の大きさにかかっており、$\Delta F_{[i]}$ の増減に応じて $|\theta_{[i]}|$ を減増させるのが合理的である。ここでは、誤差ベクトル ΔF(x) の大きさを表す $\theta_{[i]}$ と同次のスカラー量として

$$R_{[i]}=\sqrt{|\Delta F_{[i]}^{T}[k]_{[i]}^{-1}\Delta F_{[i]}|} \;\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

を考える。最初に仮定する基本修正係数 θ_0 $(0<\theta_0\leqq1)$ に対して 各回の $|\theta_{[i]}|$ を

$$|\theta_{[i]}|=\min.\left(\theta_0\frac{R_{[0]}}{R_{[i]}},\ 1\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4)$$

で決定するものとする。その符号 $\mathrm{Sgn.}(\theta_{[i]})$ は、安定域では正を与えるが、特異点通過時での場合に応じて後述の（ｂ）のように変更する。

毎回の修正において収束の傾向を

a) $\mathrm{Sgn.}(\mathrm{Det.}[k]_{[i+1]})=\mathrm{Sgn.}(\mathrm{Det.}[k]_{[i]})$.... (5.a)

b) $\mathrm{Sgn.}(\rho_{[i+1]}-\rho_{[i]})=\mathrm{Sgn.}(\theta_{[i]})$ for $\theta_{[i]}<1$
$R_{[i+1]}<R_{[i]}$ for $\theta_{[i]}=1$ .... (5.b,c)

で確認する。a)は 一連の $x_{[i]}$ が 1つの正則部分領域内に含まれることを、b)は $\theta_{[i]}<1$ での部分修正が意図した方向にあることと、$\theta_{[i]}=1$ として 解 x^* への全誤差を修正する場合には スカラー誤差 R がより小さくなることを意味している。いずれかが満たされないときには、θ_0 がなお大きすぎるものと判断して、新しい $\theta_{[i]new}$ が前回の不十分な $\theta_{[i]false}$ に対して半減するように：

$$\theta_{0\,new}=\frac{|\theta_{[i]false}|\,R_{[i]}}{2\cdot R_{[0]}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (6)$$

として、θ_0 の値を小さくえらび直した後、前回にもどって計算をやり直す。

$\theta_{[i]}$ を定符号としたときの以上の繰返計算では、$x_{[i]}$ は、その正則域に留まることを強制されたうえで((5.a))、経路(1)の上を $\mathrm{Sgn.}(\theta_{[i]})$ に応じた一定の方向に((5.b))、$\rho_{[i]}\leqq1$ の範囲で((5.c))たどることになる。その収束先については次の２通りが考えられる：

Ⅰ）$\theta_{[i]}>0$ の場合で、θ_0 が(何回かの変更の後に)有限値にとどまり条件a)とb)が保持されれば、式(2)での修正量 $\theta_{[i]}\Delta F_{[i]}$ のうちの $\Delta\{F_J\}_{[i]}$ が零に収束することになり、最後には式(4)で $\theta_{[i]}=1$ となり一般のN-R法での計算の後、解 x^* に収束する(式(5.c))。

Ⅱ）前述の a)(または b))が満たされないことによる式(6)での θ_0 の変更が連続すれば、$\theta_0\to0$ となり、式(2)での修正量 $\theta_{[i]}\Delta F_{[i]}$ の中で $\theta_{[i]}$ の方が零とな

る収束となる($\Delta F_{(i)}$は有限値にとどまる)。一方、正則域内の$x_{(i)}$を十分小さい有限のθ_0で修正すれば、次の $x_{(i+1)}$ も同じ部分正則域に留まり、条件b)を満たすことは明かであり、その収束先が正則領域内にあることはない。その集積点は Det.$[k(x^S)]=0$ の特異点 x^S となる。

以上に含まれない場合分けとして、1つの不安定域内で負の有限値$\theta_{(i)}$に対して条件 a)とb)が連続的に成立する場合が考えられる(安定域では、$\theta_{(i)}>0$を規定している)。これは、経路上(1)で$\rho\rightarrow -\infty$としても同じ不安定領域内に留まることを意味しており、現実には考えにくい。多くは、途中で Det.$[k]_{(i)}=0$ となるⅡ)の種類の収束となるものと考えられる。

(b) 特異点での経路の制御. − Ⅱ)の収束として分岐点(と飛移点)が得られた場合、特異でない経路よりその点に達したときは特異方向へ、特異方向から達したときには経路上で全ポテンシャルが減少する非特異の方向へ計算を進める。それらの方向へ与えた初期変位に対して(c)の経路上への修正を行って、隣の正則領域での経路(1)上の第1点を求め、同時にそのときのρの増減をみてその領域での$\theta_{(i)}$の正負を決定した後、(a)の部分修正法による正則経路上での計算を進める。

(c) 経路上への修正計算. − 特異方向への変位を拘束した計算で座屈以降の第1点を経路上にのせる方法[1]を以下のように一般化して、すべての点 $x_{(i)}$に適用する。

点 $x_{(i)}$は既に経路上にあるとして、荷重増減に対して式(2)で決まる$x_{(i+1)}$ ($=x_{(0)}$: ここでの計算の初期値)を、正確に経路上にのせることを考える。この最初の$x_{(i+1)}$に対して

$$t=\frac{x_{(i+1)}-x_{(i)}}{|x_{(i+1)}-x_{(i)}|} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

で定まる単位ベクトルは、経路 $x(\rho)$の点 $x_{(i)}$での接線方向を表すが、この方向への変位を拘束した修正を以下のように行う。点$x_{(j)}$を比較的小さく変位 Δx させれば式(1)の経路にのるものとすると:

$$(F_{(j)}+\Delta F=)\ F_{(j)}+[k]_{(j)}\Delta x \fallingdotseq (1-\rho)F_0+\rho P \ \ldots (8)$$

であり、この Δx が t-方向の成分を含まない条件: $t^T\Delta x=0$ を展開すれば

$$\rho_{(j)}=\frac{t^T[k]_{(j)}^{-1}(F_{(j)}-F_0)}{t^T[k]_{(j)}^{-1}(P-F_0)} \quad\cdots\cdots\cdots (9)$$

が定まる。以上の Δx 分だけ修正するものとして

$$\begin{aligned} x_{(j+1)} &= x_{(j)}+\Delta x \\ &= x_{(j)}-[k]_{(j)}^{-1}((F_{(j)}-F_0)-\rho_{(j)}(P-F_0))\ldots (10)\end{aligned}$$

を修正式とした繰返計算が考えられる。

３．２自由度系での解析例

Fig.1 に示す2自由度系でつり合い経路を数値計算した ($H=L=50[L]$, $K_A=400$, $K_B=60[F]$)。最終荷重 $P=\{0,90\}[F]$に対して(Fig.2: o は節点位置、□ は節点力)、初期位置 $x_0=\{0,-50\}[L]$からの 安定⇔<分岐>⇔不安定⇔<分岐>⇔安定と、$x_0=\{-20,-50\}[L]$からの 安定⇔<飛移>⇔不安定⇔<飛移>⇔安定の経路を求めており、十分に線形外力経路(式(1))上にあることがわかる。一方、Fig.3 は、$x_0=\{-20,-50\}[L]$からの同じ計算で、外力経路上への修正(c)をしない場合を示しており、不安定区間と特異点まわりで経路を大きく外れるのがわかる。

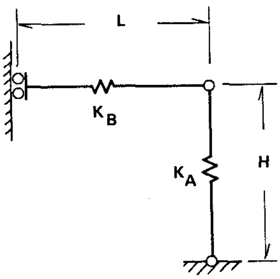

Fig.1 Propped Cantilever

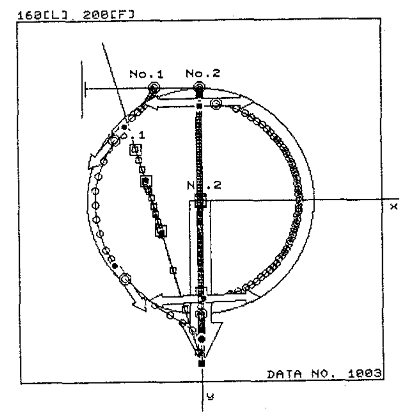

Fig.2 Equilibrium Paths with Correction (c)

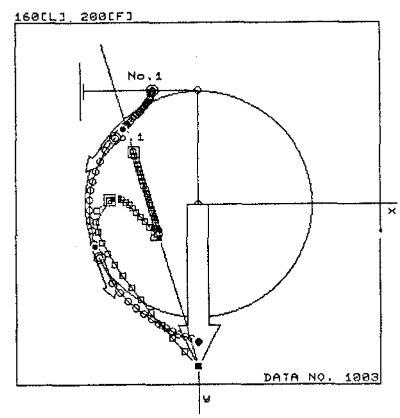

Fig.3 Without Correction (c)

〈参考文献〉 1)阿井正博・西野文雄: 離散化幾何学的非線形系での静的応答に関する数値解析について, 土木学会論文報告集, No.320, 1982-4. 2)阿井正博・西野文雄: 変位法ケーブル構造系のつり合いと形状決定に関する一理論展開, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, No.12, 日本鋼構造協会, 1988-7.