Ⅳ-211　直線あてはめに関する覚書

八戸工業大学　正会員　岩淵清行

1．まえがき

ミカイル[1]は両軸に観測誤差がある時の直線あてはめにおいて解直線をｙ＝ａｘ＋ｂとする時、測点Piの座標観測値(Xi,Yi)の最確値(Xi+Vxi,Yi+Vyi)は次の条件方程式を満足しなければならないといっている。(i=1,...,n;n>=3)

$$\phi i \equiv (Yi+Vyi) - a(Xi+Vxi) - b = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$

そしてこの方程式は非線形だからこのままの形では使えないと、この式を線形化している。言うまでもない事だが、線形化なくしては伝統的測量調整は存在しえない。しかし最近多くの学問分野でモデルの式を解くにあたりテーラー展開した時の非線形項を省略しない事が可能になってきている。私はながいあいだ(1)式をこのままの形で解けるとは思わなかったが、大型計算機を使わなくとも(1)式のままで一般的に解く事ができ、後で述べる矛盾が解決したので覚書としてそれを示す。　ところで、測量調整の伝統によれば、答を書く時には答(調整値)の推定誤差を付け加える事になっているが、非線形解としてのａ，ｂなどの推定誤差を一般的に計算する事は未解決である。

2．なぜ非線形方程式を解きたいのか

森口繁一によって戦後まもなく紹介され、その道の多くの人に感激を与えた、直線あてはめにおける「デミングの取り扱い」[2]，あるいは、森忠治の「観測した未知量と観測しない未知量とを条件式に含む場合の調整」[3]，または、田島稔の「混合方程式の場合」[4]，そしてミカイルの「一般最小二乗法」[5]などは、すべて両軸に観測誤差を仮定する時の直線あてはめ問題にかんし厳密に同じ解直線を与える。しかしてデミングが自ら注意を与えている事であるが、これらどの解法によるもX on Y Regression Line を求めようとして計算するとY on X Regression Line ができてしまう。デミングはそのような矛盾が生じるわけは線形化のためであると注意している。[6]

3．直線あてはめにおける非線形方程式の解（式の導き出し方）

我々が解くべき方程式(1)は不定方程式であり、新たに都合のよい方程式を都合よい数だけ導入する。その際、いわゆる「重さ」なるものが、先天的であれ経験的であれ、前もって与えられる必要がある[7]。Xiの重さは wxi，Yiの重さは wyiとする。λiをラグランジュの未定係数とし、$f\equiv \Sigma(wxi*Vxi^2 + wyi*Vyi^2)$，$G\equiv f/2+\Sigma(\phi i*\lambda i)$ とおくとき、Gを未知数で偏微分して0とおいた式と(1)のすべてを連立させた次の（イ）ないし(ホ)の連立方程式を解く。すなわち

(1)再記	$Yi + Vyi = a\ (Xi + Vxi) + b$	……(イ)
Gを未知数Vxiで偏微分して0とおいた式	$Vxi = a*\lambda i / wxi$	……(ロ)
Gを未知数Vyiで偏微分して0とおいた式	$Vyi = -\lambda i / wyi$	……(ハ)
Gを未知数 a で偏微分して0とおいた式	$\Sigma(Xi + Vxi)\lambda i = 0$	……(ニ)
Gを未知数 b で偏微分して0とおいた式	$\Sigma\lambda i = 0$	……(ホ)

---------　未知数の数を落としていく。

$Wi\equiv 1/wyi+a/wxi$とおき、(ｲ)(ﾛ)(ﾊ)のくみあわせから　$\lambda i = -(aXi + b - Yi) / Wi$ ……(へ)

(ﾆ)に(ﾛ)(ﾊ)(ﾍ)を代入して　$\Sigma\ \{1/Wi^2*(a*Xi+b-Yi)(Xi/wyi-a*b/wxi+a*Yi/wxi)\} = 0$ ……(ト)

(ﾎ)に(ﾍ)を代入して　$b = \{\Sigma(Yi/Wi)-(\Sigma(Xi/Wi))*a\}\ /\ \Sigma(1/Wi)$ ……(チ)

そして（ﾁ）を（ﾄ）に代入すると、勾配ａのみを未知数とする方程式　$F(a) = 0$ ……（リ）がえられる。

注意；　方程式(ﾘ)の左辺の関数F(a)はただ単に(ﾁ)を(ﾄ)に代入しただけだとａの分数関数の形になっている。普通分数方程式を解く時は通分して分母を払い、いわゆる代数方程式の形にして解く。しかしその分母を払った結果の方程式を具体的数式として示す事は私にはできなかったのでF(a)はこの覚書では常に分数の形であるとする。そして分母のaの次数が分子のそれより常に高い事に注意せられたい。そのため±∞はつねに方程式(ﾘ)の根であり、従ってこの方程式の実根は必ず２個以上あるが、(証明は簡単であるから略す)　当然ながらf値(目的関数の値)が最小となる未知数の組み合わせ一組だけが正しい答えである。

4．数値計算法

もし仮に大型計算機を使う事とするならば例えばａをマイナス一億からプラス一億まで一億分の一刻みで変化させその都度　b値を(ﾁ)式で計算し(ﾍ),(ﾊ),(ﾛ)を使ってVxi,Vyiを求め、それからf値を計算し、その値の最小となる時の　a,bを書き出させるならば、それが解直線 y = ax + b の a,b となる。当然ながらそのa は方程式(ﾘ)を満足している。もし必要ならばその時の Vxi,Vyi を書きださせればよい。そして書きだされた未知数は最初に示した条件方程式(1)を満足している。（このようなのを力まかせの解と言う人がいる）

ポケコン程度の計算機しかない時は、大型計算機のごとく1億の1億倍もの回数の繰り返し計算はできないから次のようにすればよい。すなわち、ａ≡ｔａｎ（θ）であるから ﾏｲﾅｽ∞から ﾌﾟﾗｽ∞までのａをθを0°から180°までたとえば1°刻みでとってきて定め、その都度、左辺関数F(a(θ))値を計算しておく。これだと繰り返し数は180回にすぎない。そしてF(a(θ))が符号をかえる時の両側のａ値をa1とa2とし、このa1とa2を使い「はさみうち法」でa1とa2の間の根をもとめる。この計算をする場合a1とa2の間に零点が２個以上あってはだめである。上記1°は経験からの許される最大の刻みである。勿論データによってはその刻みを10°以上にとってやっても失敗しない事もあるにはある。さて実根の数がいくつあるかを示すｽﾂﾙﾑの定理のようなものはいまの場合まだない。経験によると左辺関数Z≡F(a)の零点の数は(±∞を1個と勘定する事にすると) 2個,3個,5個の場合がある。Y on X Regression Lineは2個の時である。そのほかの有名回帰直線の時は３個である。５個の時の数値例を表１にしめす。このような零点5個の数値例はなにも無理して探したものではない。しかし常識的な重さの時は零点3個になるのが普通である。複数個の根を得たならば、すでに述べた様にしてf値をそれぞれについて計算しそれが最小となる未知数の組み合わせが答えとなる。表2と表3はデータの与え方の参考である。今,c≡wxi/wyiとおくに、表2と表3の場合cはiのいかんにかかわらず定数になっている。このような場合には我々の方程式(ﾘ)すなわちF(a)=0は、cをパラメータとするａの二次方程式となり（たとえばc＝１の時はよく知られるごとく直交回帰直線）昔から手計算で答えを求めてきている。このようなc値既知の場合を線形化した計算式で解くとXへのYの回帰直線のa,bしか出てこないという矛盾は、多くの人が知っている。

表１(零点5個)

測点no.	X	Y	wx	wy
1	0	7	13	12
2	2	1	11	27
3	6	9	14	31
4	8	3	11	8
5	14	10	15	2

答え a≒ 0.865 620 337
b≒ 1.783 940 485

表2 (XへのYの回帰直線零点2個)

測点no.	X	Y	wx	wy
1	0	7	10^{20}	1
2	2	1	10^{20}	1
3	6	9	10^{20}	1
4	8	3	10^{20}	1
5	14	10	10^{20}	1

答え a≒ 0.333 333 333
b≒ 4.000 000 000

表3 (YへのXの回帰直線零点3個)

測点no.	X	Y	wx	wy
1	0	7	1	10^{20}
2	2	1	1	10^{20}
3	6	9	1	10^{20}
4	8	3	1	10^{20}
5	14	10	1	10^{20}

答え a≒ 1.500 000 000
b≒-3.000 000 000

５．おわりに

両軸に任意の観測誤差ある時の直線あてはめは観測誤差が微小でない時は非線形方程式を解くこととなる。その際、線形化せづに答えの直線を求め得ることがしめされた。しかし、答えに対する推計学的評価のしかたは、まだほとんど不明のままである。

参考文献

１） Edward M.Mikhail and Gordon Gracie,Analysis and Adjustment of Survey Measurements ,1981,p.237
２） ﾃﾞﾐﾝｸﾞ原著,森口繁一訳,推計学によるﾃﾞｰﾀのまとめ方,岩波,1950年
３） 森　忠次著,測量学2応用編,丸善,昭和56年
４） 田島稔,小牧和男共著,最小二乗法の理論とその応用,東洋書店,昭和63年,第二版
５） 文献１）の第九章
６） 文献２）のp.112 , p.100
７）米谷栄二,山田善一共著;新版測量学 一般編 丸善 昭和58年,p.363