Ⅳ－146　コンジョイント・ロジットモデルの解の不定性問題に関する一考察

東北大学　正会員　湯　沢　昭

1．はじめに

従来のロジットモデルやプロビットモデルのような集計型のモデルは、個人間の選択肢、属性、及び属性のウェイトの差をセグメント間でしか評価できず、そのため母集団のセグメント化、つまり意思決定基準の均質化が予測精度の向上を図る上で重要なポイントとなっている。本研究で取り上げるコンジョイント分析は、主にマーケッティング・リサーチの分野で研究開発されたものであり、個人の選好構造に基づく意思決定モデルであるため、意思決定の単位である個人間の差を陽な形で評価することが可能である。この種のモデルとしては、すでにMONANOVA やLINMAPといった確定論的モデルが開発されており、近年ではコンジョイント分析に確率効用理論を導入したモデルが開発されている。我が国においても小川[1]や片平[2]らの一連の研究があり、本論文では小川にならって、コンジョイント分析にロジットモデルの考え方を導入した方法をコンジョイント・ロジットモデルと呼ぶことにする。このコンジョイント・ロジットモデルの大きな問題の1つに『解の不定性問題』がある。これは与えられた選択肢の順序関係が加法的表現と矛盾しない場合には、解が発散し、その結果パラメータを求めることができなくなるものである。本論文ではこの『解の不定性問題』に関して若干の考察を行うものである。

2．コンジョイント・ロジットモデルの解の不定性

分析者（計画者）は、属性の集合である選択肢を消費者（意思決定者）に提示し、消費者は自分の価値判断に基づき与えられた選択肢に対し序列を付ける。コンジョイント分析の目的はこのようにして個人毎に収集された選好データに対して、その序列を再現するように各属性の重み（パラメータ）を推定することにある。今、個人が順序付けした選択肢の数をnとすると、各々の選択肢より得られる効用の序列は式(1) のようになる。

$$U1 \geqq U2 \cdot\cdot\cdot \geqq Un \quad \cdots\cdots (1)$$

また、各選択肢の効用は式(2) のように表現する。

$$Uj = \sum_i \theta i \ Xij \quad \cdots\cdots (2)$$

従って、コンジョイント分析の目的は式(1) の条件を満足するような式(2) の θi を求めることに帰着する。このパラメータを求めるアルゴリズムとして、前述したようにMONANOVAやLINMAP等がある。式(2) に示した選択肢の効用(Uj)が、確定項(Vj)と確率項（ε j)の和であり、さらに確率項の分布形に二重指数分布を仮定することにより多項ロジットモデルが導出されるのは周知のとおりである。

$$Pj = \exp(\omega Vj) / \sum_j \exp(\omega Vj) \quad \cdots\cdots (3)$$

次に式(1) で示した各選択肢の序列が得られる同時確率をLとすると

$$L = P(1|J1) \cdot P(2|J2) \cdot\cdot \ P(n|Jn) \quad \cdots\cdots (4)$$

となる。ここで式(4) の右辺、たとえばP(1|J1) は選択肢n個の中から1番目の選択肢が選ばれる確率であり、P(2|J2) は1番目の選択肢を除いた残りの中から2番目の選択肢が選ばれる確率を表わしている。従って、式(4) は各々の選択肢が選ばれる同時確率を表わしていることになる。式(3) 式(4) より

$$L = \prod_{h=1}^{n} \frac{\exp(\omega Vh)}{\sum_{j=h}^{n} \exp(\omega Vj)} \quad \cdots\cdots (5)$$

となり、効用の確定項(Vh)に式(2) を代入し、パラメータ θ の関数とみなすことにより、式(5) は尤度関数となる。従ってパラメータの推定は最尤推定法を適用することにより求めることが可能である。

次に式(5) を変形すると

$$L = \frac{e^{\omega V1}}{e^{\omega V1} + \cdot + e^{\omega Vn}} \cdot \frac{e^{\omega V2}}{e^{\omega V2} + \cdot + e^{\omega Vn}} \cdot \cdot \frac{e^{\omega Vn}}{e^{\omega Vn}}$$

$$= \frac{1}{1 + e^{\omega (V2-V1)} + \cdot} \cdot \frac{1}{1 + e^{\omega (V3-V2)} + \cdot} \cdot \cdot \cdots\cdots (6)$$

となる。ここで『解の不定性問題』とは、「矛盾の

ない序列」の場合であり、式(6) で$V1>V2>\cdot>Vn$の時$\omega(Vi-Vj)$ の値は負になることが分かる（ただしωは正とする）。つまり式(6) の尤度を最大にするためには$\omega(Vi-Vj)=-\infty$にする必要があり、結果的にパラメータθを決定することはできない。

今、効用関数のωをスケールパラメータ、θを各属性の相対的重要度とし、$\Sigma\theta i^2=1$になるように決定すると「矛盾のない序列」の場合には、ωの値により式(3) のPjは次のようになることがわかる。

$\omega=\infty$の場合　$P1=1, P2=P3=\cdot=Pn=0$

$\omega=0$の場合　$P1=P2=P3=\cdot=Pn=1/n$ ―― (7)

式(7) より、ωの値は各選択肢間の相対的選択確率に大きな影響を与えていることが分かる。コンジョイント・ロジットモデルの目的が単に個人の序列を再現するだけであれば、$\omega=1$、$\Sigma\theta i^2=1$として式(5) の尤度関数を解くことはできる。しかし、それは式(1) の選択肢の効用の序列を再現するだけであり、式(3) で示した各選択肢の選択確率を求めることはできないのは明らかである。従って、個人の選択確率を求めるためには、ωの値を何らかの方法により推定することが不可欠である。

片平はこの問題の解決策として、式(5) の尤度関数を$\omega=1$、$\Sigma\theta i^2=1$とした条件付き問題としてθの値を決定し、次に全サンプルをプールした上でωの値を決定している。つまりθの推定に当たっては個人間の異質性を保ちながら、ωの大きさは母集団で同一に固定している。しかし、ωの値を固定することは、式(7) からも明らかなように各選択肢の相対的選択確率を固定することになるし、また個人モデルであるコンジョイント・ロジットモデルの特徴が薄れてしまう可能性もある。これは交通機関選択の例でいえば、たとえば［車>バス］と序列されたデータがある場合、車の選択確率が0.51でバスが0.49の状態と、車0.99バス0.01の状態を区別出来ないことになる。式(7) より前者の場合のωの値は零に近く、後者の場合は大きな値となる。

一般に式(5) で示した尤度関数に最尤推定法を適用した場合、尤度を最大にすることはいわば各選択肢の判別度合いを最大にするようにθの値を決定するため、その結果であるθの値を用いて選択確率を議論するのは多少無理があると考えられる。

従って、本論文では個人は与えられた選択肢に対してその序列を決定すると同時に、各選択肢に対する潜在的な選択確率をも有しているものと仮定する。それによりもし第1番目に序列された選択肢の選択確率(P1)が与えられたとした場合、

$$P1=\exp(\omega_0 Vj)/\sum_j \exp(\omega_0 Vj) \quad\text{—— (8)}$$

よりω_0 の値を推定することができる。これはいわば個人の選択確率に対し、回帰的方法によりω_0 の値を決定しようとするものであり、それにより選択肢の序列とその間隔を同時に評価することが可能となる。従って、式(5) の最大化問題はその対数をとることにより式(9) のようになる。

$$L(\theta)=\sum_{h=1}^{n}[Vh-Ln(\sum_{j=h}^{n}\exp Vj)]\rightarrow Max$$
$$\text{sub to} \quad\text{—— (9)}$$
$$Vj=\sum_i\theta i\ Xij$$
$$\sum_i\theta i^2=\omega_0$$

式(9) は、Fletcher-Powell 法等の数値計算によりその解を求めることができる。

3．まとめ

本論文は、個人モデルであるコンジョイント・ロジットモデルの『解の不定性』問題に対し、個人の選択肢に対する潜在的な選択確率を導入することによりその解決を図る方法を提案した。これにより、個人別のパラメータθを推定し、選択肢の序列とその間隔を同時に評価することが可能となる。しかし、ここで問題となるのは各個人が選択肢に対する潜在的な選択確率を有しているか、またそれが調査可能かの問題がある。この点に関しては講演時に述べることにする。

参考文献

1)小川：「コンジョイント尺度」を与える最尤推定量について、経営志林、Vol.18, PP.37-52, 1981

2)片平：多属性消費者選択モデル　経済学論集、Vol.50, No.2, PP.2-18, 1984