Ⅳ-105　地域モデルにおける空間相互作用のモデル化とその推定方法

京都大学大学院　学生員　足立康史
京都大学工学部　正　員　吉川和広
京都大学工学部　正　員　奥村　誠
京都大学大学院　学生員　林　謙一

1．はじめに

これまでに数多くの地域モデルが開発されてきた。これらのモデルの推定には、通常最小二乗(ＯＬＳ)法が多く用いられている。しかしながら地域現象の形成過程は、空間的な次元を含んでおり、攪乱項の分布の正規性や独立性の仮定が満たされないことがほとんどである。その結果ＯＬＳ推定量が効率性などの望ましい性質を持たないことが多い。本稿では、地域モデルにおける空間相互作用のモデル化の方法を考察し、その推定方法を明らかにする。

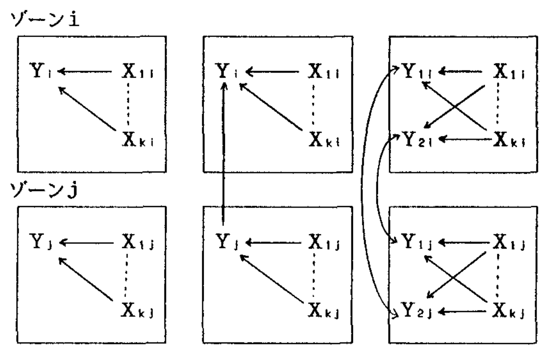
2．空間相互作用のモデル化に関する既存の研究

地理学の分野では、地域の現象をその周辺の環境（地）により決定される部分と、その場所に固有の要因（図）により決定されている部分に分けて理解するというアプローチが採られることが多い。このように一般に地域の現象は、自ゾーンに固有の要因（内在的諸特性）と、他ゾーンからの影響要因（空間相互作用）から説明できると考えられる。このうちのどちらが大きな説明力を持つかは、対象とする現象により異なるが、前者の影響が特に強い場合には、各ゾーンごとに変数間の関連関係が閉じているので、「非地域型のモデル」（図１のＡ）により表現することができ、その推定法については従来計量経済学の分野で研究が蓄積されてきている。

後者の影響力が強い場合には、他の地域の影響を考慮した「地域モデル」を用いる必要がある。このような空間相互作用を考慮した地域モデルについては、1970年代以降地理学者であるCliff、Ordらを中心にして研究が進展しているが、その基礎となっているのは空間自己回帰モデルである。

$$y_i=\rho\Sigma f_{ij}y_j+X_i\beta+\varepsilon_i \quad (i=1,,,n) \quad (1)$$

Ｘは外生変数行列(n×k)，ｙは内生変数ベクトル(n×1)，βはパラメータベクトル(k×1)，ρは空間相関係数，εは攪乱項ベクトル(n×1)を表わす。また添字のｉは着目しているゾーン、ｊはそのゾーンに影響を持つ他のゾーンを表わす（以下同様）。



A:非地域型モデル　B:空間自己回帰モデル　C:連立型地域モデル

図１　地域モデルにおける空間相互作用のモデル化

空間相互作用は本来、他ゾーンの変数との機能的な関係によって生じるものであるが、このモデルではその関係を明示的に取り扱う代わりに事後的に自己相関項により表現している（図１のＢ）。このモデルは、他のゾーンの内生変数が右辺に含まれているため、ＯＬＳ推定では有効な推定量が得られず、特別な工夫が必要である。Ord(1975) によって最尤推定法と反復一般化最小二乗法が開発されている。

3．空間相互作用の明示的なモデル化
（連立型地域モデル　図１のＣ）

例えば、小売販売額と人口が内生変数である場合には　各ゾーンの小売販売額は自ゾーンばかりでなく隣接するゾーンの人口にも影響を受ける。つまり他のゾーンの別の内生変数が相互作用の原因となっており、その関係は以下のような連立方程式の形で表現できる。

$$y_{1i}=\rho_1\Sigma f_{ij}y_{2j}+X_i\beta_1+\varepsilon_{1i} \quad (i=1,,,n)$$
$$y_{2i}=\rho_2\Sigma g_{ij}y_{1j}+X_i\beta_2+\varepsilon_{2i} \quad (2)$$

ローリーモデルを基礎とするモデルをはじめとする多くの土地利用モデルはこの形式に帰着できる。これまでは推定法にはあまり注意が払われず、右辺

のy_{1j}、y_{2j}を外生変数のように扱って、ＯＬＳ推定されることが多かった。しかし他ゾーンの内生変数が右辺に含まれているため、有効な推定量が得られないという問題がある。本研究ではこのモデル構造に対応した推定方法を開発する。

4．連立型地域モデルの反復一般化最小二乗法

（ＩＧＬＳ:Iterated Genaralized Least Square)

連立型地域モデルの推定法を開発する際には、右辺に内生変数を含んでいるという点で（1)式の空間自己回帰モデルの推定手法が参考になる。ゾーン数が限られている地域モデルにおいては、観測データの個数も多くとれないため小標本特性が問題になることが多い。ここでは、漸近性に基礎をおき大標本特性が優れている最尤推定法ではなく、Ord(1975)による反復一般化最小二乗法をもとにして連立型への拡張を考える。なお大標本領域では両者の結果は一致する。

（2)式を行列表示すると、次式のようになる。

$$y_1=\rho_1 F y_2+X_1\beta_1+\varepsilon_1$$
$$y_2=\rho_2 G y_1+X_2\beta_2+\varepsilon_2 \qquad (3)$$

さらにこの2式をまとめると、次のように書ける。

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\rho_1F\\\rho_2G&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}X_1&0\\0&X_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix}$$

これを変形すると、

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I&-\rho_1F\\-\rho_2G&I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}X_1&0\\0&X_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}I&-\rho_1F\\-\rho_2G&I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{pmatrix} \qquad (4)$$

となる。

よってベクトル（y_1 y_2）^{T}の共分散は、

$$E\begin{pmatrix}I&-\rho_1F\\-\rho_2G&I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_1\\\varepsilon_2&\varepsilon_2\end{pmatrix}^{T}\begin{pmatrix}I&-\rho_1F\\-\rho_2G&I\end{pmatrix}^{-1\,T}$$
$$=\begin{pmatrix}I&-\rho_1F\\-\rho_2G&I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_1^2I&0\\0&\sigma_2^2I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-\rho_1F\\-\rho_2G&I\end{pmatrix}^{-1\,T}$$
$$=\sigma_1^2\ \Omega \qquad (5)$$

となる。ただし、

$$\Omega=\begin{pmatrix}I&-\rho_1F\\-\rho_2G&I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}I&0\\0&\xi I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-\rho_1F\\-\rho_2G&I\end{pmatrix}^{-1\,T} \qquad (6)$$
$$\xi=\sigma_2^2/\sigma_1^2 \qquad (7)$$

である。

よって、未知パラメータ$\rho_1,\rho_2,\beta_1,\beta_2$の値を求めるためには、行列$\Omega$の逆行列$\Omega^{-1}$を重みとしてＧＬＳ推定すればよい。つまり、

$$\begin{pmatrix}\rho_1\\\rho_2\\\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}Fy_2^T&0\\0&Gy_1^T\\X_1^T&0\\0&X_2^T\end{pmatrix}\Omega^{-1}\begin{pmatrix}Fy_2&0&X_1&0\\0&Gy_1&0&X_2\end{pmatrix}\right]^{-1}$$
$$\times\begin{pmatrix}Fy_2^T&0\\0&Gy_1^T\\X_1^T&0\\0&X_2^T\end{pmatrix}\Omega^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \qquad (8)$$

により求められる。ただし、

$$\Omega^{-1}=\begin{pmatrix}I+\rho_2^2\xi G^TG&-\rho_1F-\rho_2\xi G^T\\-\rho_1F^T+\rho_2G&\rho_1^2F^TF+\xi I\end{pmatrix} \qquad (9)$$

である。

ここで、重み行列Ω^{-1}に未知パラメータρ_1,ρ_2,ξが含まれているため、繰返し手順が必要となる。

すなわち、

① 先験的情報を用いてパラメータ ρ_1,ρ_2,ξの初期値を与えて（情報がないときは$\rho_1,\rho_2=0,\xi=1$と置く）重み行列Ω^{-1}を計算する(式8)。

② ①で求めた重み行列 Ω^{-1}を用いてＧＬＳ推定を行い、推定値$\beta_1,\beta_2,\rho_1,\rho_2$を求める(式7)。また残差の分散の比を$\xi$とする。

③ ②で求めた推定値ρ_1,ρ_2,ξ を用い、重み行列Ω^{-1}を計算し直す(式8)。

④ ③で求めた Ω^{-1}を用いて新たに推定値$\beta_1,\beta_2,\rho_1,\rho_2$ をＧＬＳ推定により求める(式7)。ξは②と同様に残差の分散の比を用いて更新する。

⑤ 全ての推定値が収束しているか調べる。 収束していない場合は③に戻り、③～⑤を繰返す。

5．モンテカルロ・シミュレーション

本推定法の特性を調べるためモンテカルロ・シミュレーションを実施し、ＯＬＳ推定量との比較を行なった。その結果、ＩＧＬＳは効率性が優れていることがわかった。特に、β_1とβ_2の大きさに差がある場合、ρ_1とρ_2の積が１に近いような場合、 ρ_1が１に近く β_1が０に近いような場合には、ＯＬＳではβの推定値の分散が大きくなるが、ＩＧＬＳでは小さく押えることができることが確かめられた。

参考文献

1)Anselin :Spatial Econometrics,Pion,1988
2)Cliff & Ord :Spatial Processes,Pion,1981
3)Ord:Estimation Methods for Models of Spatial Interaction. Journal of American Statistical Association ,1975