

III-399 分布関数による粒度分布の表現と比較

名城大学 大学院 学生会員 ○田口泰敏
 名城大学 理工学部 正会員 板橋一雄
 名城大学 理工学部 正会員 立石哲郎

1. はじめに

土の粒度分布を確率モデルで表現する研究は古くから行われており、対数正規分布や負の二項分布がよく適合するという報告がある¹⁻³⁾。筆者らは三河地方から採取したまき土の粒度分布に、正規分布、対数正規分布、負の二項分布、ポアソン分布を当てはめ、カイ2乗検定の結果、対数正規分布と負の二項分布がよく適合することを明らかにしてきた⁴⁾。そこで、この報告では各分布関数の頻度分布の特徴を示すとともに、土質工学で用いられている粒径加積曲線による比較を行い、視覚的に適合の程度を明らかにする。

2. 連続分布関数と離散分布関数

この報告で取り扱った分布関数は、連続分布関数の正規分布と対数正規分布、離散分布関数の負の二項分布とポアソン分布の四つである。それぞれの確率密度関数や確率関数は式(1)～(4)で示される⁵⁾。ここに、 d は粒径(mm)を示し、 n は離散化した粒径番号を意味する。

$$P(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad -\infty < d < \infty \quad (1)$$

$$P(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\zeta d\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln d - \lambda}{\zeta}\right)^2\right\} \quad 0 < d < \infty \quad (2)$$

$$P(r, m) = \binom{n+r-1}{n} m^n (1-m)^r \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$P(\nu) = \frac{\nu^n}{n!} \exp(-\nu) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

3. 分布関数のあてはめ

正規分布、対数正規分布、負の二項分布、ポアソン分布の分布形は、各々の分布パラメータ(μ, σ)、(λ, ζ)、(r, m)、(ν)によって決定される。図-1(a)の頻度分布図よりこれらの分布パラメータを求め、式(1)～(4)に代入すれば図-1(b)と図-2を描くことができる。

図-1(b)は、正規分布と対数正規分布の頻度分布を示したものである。この図では、粒径が対数目盛りで取ってあるために、正規分布の裾が左に伸びた形になっている。また、対数正規分布は、図上で左右対称の分布形となっており、図-1(a)の頻度分布を適切に表現している。

図-2(a)は、福本の提案に基づき、最大粒径 $d_{\max} = 1000 \text{ mm}$ 、粒径の公比 $\lambda = \sqrt[4]{2}$ と仮定したときの負の二項分布の頻度分布を示したもので、図-2(b)は、ポアソン分布の頻度分布を示したものである。両者の離散分布を比較すると、負の二項分布の方が頻度のピーク値は低くなり、ばらつきの程度は大きくなっていることがわかる。このことは、ポアソン分布では平均値の1次のモーメントしか考えないが、負の二項分布では平均値と分散という2次のモーメントまでを考慮することの現れであろう。

また、計算した分布関数を粒径加積曲線の形で実測のものと比較して、連続分布関数と離散分布関数の別で示したものが図-3、4である。図-3より、対数正規分布は比較的良好に実測分布を表現していることがわかる。しかし、正規分布は粒径の小さい部分で通過重量百分率を過大評価し、全体的に分布形は一致していない。図-4より、負の二項分布は、粒径加積曲線の位置と勾配の両者とも適切に表現されていることがわかる。そして、その近似の程度は対数正規分布とほぼ同じくらいである。一方、ポアソン分布は、負の二

項分布に近い形状を示しているが、粒径の小さい部分で通過重量百分率をわずかに小さく、粒径の大きい部分でわずかに大きく評価する傾向にある。

4. おわりに

この報告で得られた結論は次のとおりである。

- 1) 取り上げた分布関数の頻度分布の特徴が明らかになった。
- 2) 取り上げた分布関数について、粒径の頻度分布と粒径加積曲線により視覚的に適合の程度を評価した結果、連続分布と離散分布の違いはあるけれど、対数正規分布と負の二項分布が実測分布を適切に表現している。これはカイ2乗検定の結果と対応している。

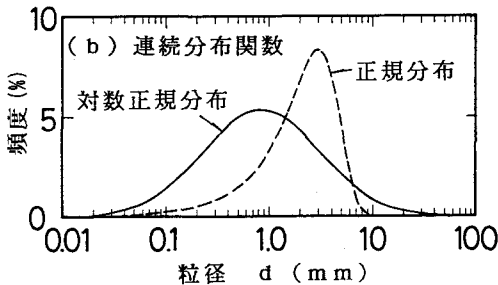
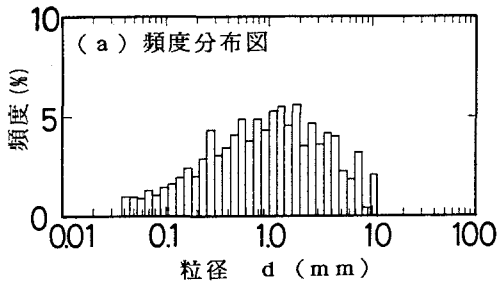


図-1 頻度分布図（実測分布と連続分布）

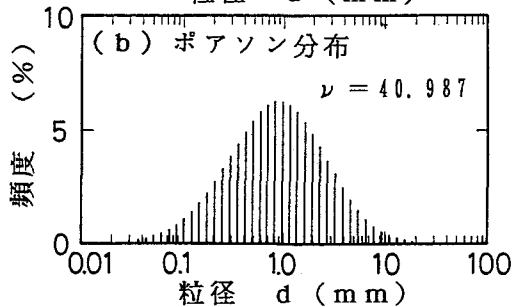
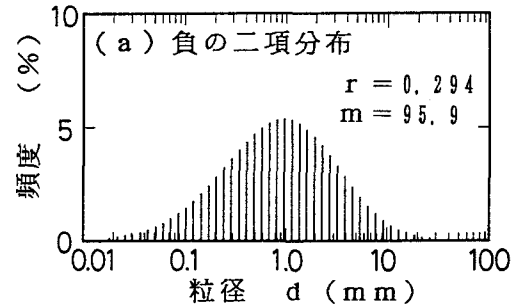


図-2 頻度分布図（離散分布）

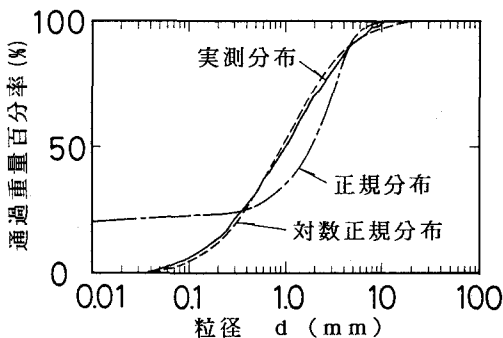


図-3 粒径加積曲線の比較（連続分布）

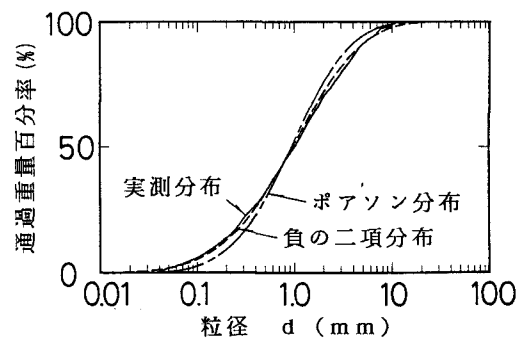


図-4 粒径加積曲線の比較（離散分布）

- <参考文献>
- 1) 箭内寛治：土の粒度分布に関する一考察、第10回土質工学研究発表会概要集、pp. 51～54、1975
 - 2) 福本武明：まさ土の粒度分布に関する一考察、第22回土質工学研究発表会概要集、pp. 165～166、1987
 - 3) 福本武明：まさ土の粒度式について、第23回土質工学研究発表会概要集、pp. 197～198、1988
 - 4) 田口泰敏他：パスカル分布によるまさ土の粒度分布特性、土木学会中部支部研究発表会、1989、
 - 5) 竹内啓、藤野和建：2項分布とポアソン分布（UP応用数学選書2）、東京大学出版会、1981