III-281　散逸項を考慮した飽和多孔質弾性体の応答解析

東北大学大学院　学生員　清水幹夫
山梨大学工学部　正　員　平島健一

1. はじめに

本研究は、散逸項を考慮した飽和多孔質弾性体に、動的な荷重が作用した場合を平面ひずみ問題として取り扱い、解析解を求めたものである。散逸項を考慮した飽和多孔質弾性体の研究は、これまでに例えば、Rice& Cleary(1976), Rudnicki(1986,1987)、Detournay & Cheng(1987)らによってなされてきているが、本研究で用いた解析方法は、空間について Fourier変換、時間について Laplace変換した場の方程式を表面に作用する時間依存の荷重の初期ならびに境界条件のもとで、変換領域（像空間）の解として求め、これを逆Fourier-Laplace 変換することによって実領域での閉じた型の解析解を得ることをめざしたものである。

2. 基礎方程式

間隙圧をp、単位体積当たりに含まれる間隙流体の質量をm、x－y平面内のx，y方向の変位成分をそれぞれu_x, u_yとすれば、質量mと全応力σ_{xx}，σ_{xy}，σ_{yy}との関係は、次式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned} &G(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}) = \delta_{\alpha\beta}-\nu\,(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\,\delta_{\alpha\beta}+\left[\frac{3(\nu_u-\nu)}{B(1+\nu_u)}\,p\,\delta_{\alpha\beta}\right], \\ &m-m_0=\frac{3\rho_0(\nu_u-\nu)}{2GB\,(1-\nu_u)}\left[\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\frac{3p}{B(1+\nu_u)}\right]. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

ここに、m_0は応力が零のときのmに相当する量、Gはせん断弾性係数、νとν_uはそれぞれ透水状態（長時間）と不透水状態（短時間）の応答を支配するポアソン比、Bはスケンプトンの間隙圧係数、ρ_0は間隙流体の密度である。

もう一つの構成方程式として次のダルシーの法則があり、これはα方向の単位体積の間隙流体の質量速度がq_αであることを表わしたものである。

$$q_\alpha = -\rho_0 k\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}. \cdots\cdots(2)$$

ここにkは透水係数であり、k´を単位面積、μを粘性係数として$k=k'/\mu$と表わされる。

平面ひずみ問題の散逸項を考慮した場の方程式は、全応力$\sigma_{\alpha\beta}$と間隙圧pによって以下のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta,\beta}=0, \qquad \nabla^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+2\eta p)=0, \\ &\left(c\,\nabla^2-\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\frac{2\eta}{\mu}p\right]=0. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

ここに、cは拡散係数、$\mu=(\nu_u-\nu)/(1-\nu)$, $\eta=3(\nu_u-\nu)/[2B(1+\nu_u)(1-\nu)$である。式(3) をFourier-Laplace 変換すれば次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} &ik\hat{\sigma}_{xx}+\frac{d\hat{\sigma}_{yy}}{dy}=0, \qquad \left(-k^2+\frac{d^2}{dy^2}\right)(\hat{\sigma}_{xx}+\hat{\sigma}_{yy}+2\eta\hat{p})=0. \\ &ik\hat{\sigma}_{xy}+\frac{d\hat{\sigma}_{yy}}{dy}=0, \left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2-\frac{s}{c}\right)\left(\hat{\sigma}_{xx}+\hat{\sigma}_{yy}+\frac{2\eta}{\mu}\hat{p}\right)=0. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

この常微分方程式を解けば変換領域（像空間）での一般解が得られる。

3. 初期および境界条件と解析解

ここでは、飽和多孔質弾性体の半無限体の表面に時間の経過と共に比例的に大きさを増すx軸に沿って一様な荷重が作用した場合を考える。このとき、表面は透水性の境界として扱うものとする。

したがって、初期および境界条件は以下の３式で表わされる。

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{yy}(x,y=0,t)=2(1-\nu_u)\sigma_0\dfrac{t}{t_0}H(t),\quad p(x,y=0,t)=0,\\ u_x(x,y=0,t)=u_0 H(t).\end{array}\right\}\cdots\cdots(5)$$

ここに、σ_0, u_0はそれぞれ応力、変位の次元を持つ定数、H (t) は単位階段関数である。上記の初期および境界条件式を与えてやれば、変換領域で常微分方程式の特解が求められる。
式(4) を解き、その結果を逆 Fourier− Laplace変換すれば、最終的に次の解析解が具体的に定められる。

$$\sigma_{xx}=2\nu_u\sigma_0\frac{t}{t_0}-\frac{16}{\sqrt{\pi}\,t_0}\mu\sigma_0 t\int_z^\infty\frac{(t-z)^n}{n!}e^{-\alpha^2}d\alpha,\quad \sigma_{yy}=2(1-\nu_u)\sigma_0\frac{t}{t_0}.\cdots\cdots(6)$$

4.数値計算例

ここでは、σ_{yy}(x, y＝0, t) がFig.1 に示すように変化する荷重を対象とした場合について、σ_{xx}とｐの応答を計算した結果をFig.2 および3に示した。この結果についての考察ならびにその他の計算例等については学会当日発表するものとする。

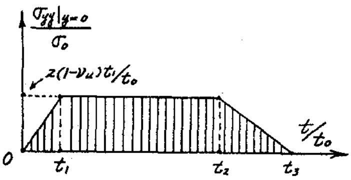

Fig.1

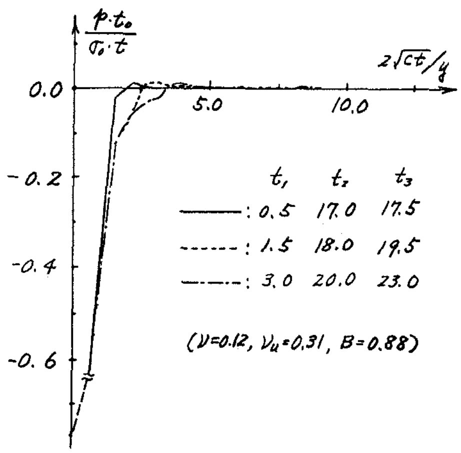

Fig.3

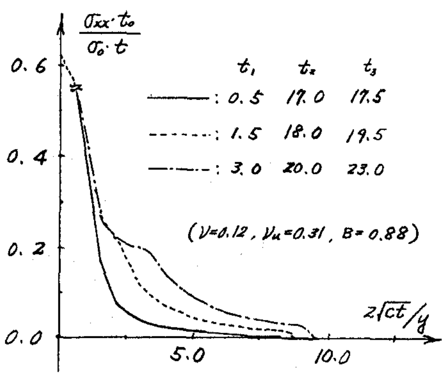

Fig.2

参考文献：

1) Rice,J.R.,and Cleary,M.P.,1976,Rev.Geophys.Phys.,Vol.14,pp.227-241.
2) Rudnicki,J,W.,1986,American Geophysical Union,Geophysical Monograph 37,pp.81-89.
3) Rudnicki,J,W.,1987,J.Appl.Mech.,Vol.54,pp.545-552.
4) Detournay,E.,and Cheng,A.H-D.,1987,J.Appl.Mech.,Vol.54,pp.783-787.