

II-344

自由表面を有する三次元粘性流体の有限要素法解析

佐藤工業(株) 正会員 歌川紀之 金子典由
中央大学 正会員 川原睦人

1. はじめに

有限振幅波や砕波の現象は従来、海洋構造物に作用する波力や地震時のスロッシングによりタンク壁面に作用する流体力といった構造設計の問題として扱われてきた。一方、近年それを積極的に活用する動きも見られる。サーフィンを行うために人工的に有限振幅波を発生できるプールやスロッシング現象を活用した高層ビルの制震装置の開発がその例にあたる。本報告ではこのような浅海域における波の変形や複雑な形状を有するタンク内のスロッシング現象の把握を目的とした、有限要素法による自由表面を含む三次元非圧縮性粘性流体の解析手法を紹介する。さらに本手法を用い、孤立波の伝播解析を行なったので以下に示す。

2. 支配方程式

非圧縮粘性流体の挙動はナビエ・ストークス方程式、連続の式および自由表面の境界条件で記述される。

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} + \frac{1}{\rho_0} p_{,i} - \nu v_{i,jj} = f_i \quad (1) \text{ ここで、}$$

v_i ; 流速

$$v_{i,i} = 0 \quad (2) \quad \rho_0 ; \text{密度}$$

p ; 圧力

$$p = p_a = 0 \quad (\text{力学的境界条件}) \quad (3) \quad \nu ; \text{動粘性係数}$$

f_i ; 物体力

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v_3 - v_1 \eta_{,1} - v_2 \eta_{,2} \quad (\text{運動学的境界条件}) \quad (4) \quad p_a ; \text{大気圧}$$

η ; 水位上昇

3. 流速修正法

流体内の流速および圧力の計算では、流速修正法¹⁾に改良を加えた手法を用いた。(1)式を時間に関する差分式で表示する。ここで、 Δt はタイムステップ、 Δt は時間増分量を示す。

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \Delta t (v_j v_{i,j}^n + \frac{1}{\rho_0} p_{,i}^{n+1} - \nu v_{i,jj}^n - f_i^n) \quad (5)$$

中間流速 $\tilde{v}_i^{n+1}$ の算定式を(6)式に示す。ここで、 $\sim$ は流速、圧力の修正前の値(中間値)を示す。

$$\tilde{v}_i^{n+1} = v_i^n - \Delta t (v_j v_{i,j}^n + \frac{1}{\rho_0} \tilde{p}_{,i}^{n+1} - \nu v_{i,jj}^n - f_i^n) \quad (6)$$

圧力の修正式を(7)式のように仮定する。ここで、圧力の中間値は前ステップの静水圧とする。また、 ϕ は圧力の修正量、 z は鉛直方向の座標値を示す。

$$p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} + \rho_0 \phi^{n+1} = \rho_0 g (\eta - z)^n + \rho_0 \phi^{n+1} \quad (7)$$

(5)式と(6)式の差をとり、(7)式を考慮すると、流速の修正式(8)が得られる。

$$v_i^{n+1} = \tilde{v}_i^{n+1} - \Delta t \phi_{,i}^{n+1} \quad (8)$$

(8)式の両辺を空間方向に微分し、連続の式(2)を考慮すると、 ϕ の算定式(9)が得られる。

$$\tilde{v}_{i,i}^{n+1} = \Delta t \phi_{,i}^{n+1} \quad (9)$$

これらの方程式に重み付き残差法を適用し、有限要素法の定式化を行う。流速、圧力の計算では、8節点6面体アイソパラメトリック要素、水位上昇は4節点4辺形アイソパラメトリック要素を用いた。

解析の手順をまとめると、以下のようになる。

- [1] (6) 式を用い、中間流速 $\tilde{v}_i^{n+1}$ を計算する。
- [2] (9) 式を用い、圧力の修正値 ϕ^{n+1} を計算する。
- [3] (7)、(8) 式を用い、圧力の修正値 p^{n+1} 、
流速の修正値 v_i^{n+1} を計算する。
- [4] (4) 式を用い、水位上昇 η^{n+1} を計算する。
- [5] 水位上昇に合わせ、鉛直方向に節点を移動する。

4. 数値計算例〔水平床上の孤立波の伝播解析〕

計算した孤立波の波高・水深比は0.36および0.49である。水路のモデルを図-1に示す。水路の諸元は長さ18.0m、幅0.4m、水深1.0mである。孤立波を発生させるため、水路端において次のような流速を与えた。

$$V(t) = \omega X_0 \cdot \text{sech}^2 [\omega(t-t_0)] \quad \text{for } 0 \leq t < T \quad (10)$$

各定数については、中山の文献2)にならい、
 $\omega = 1.57 \text{ s}^{-1}$ 、 $X_0 = 0.60 \text{ m/s}$ 、 $t_0 = 1.60 \text{ s}$ 、
 $T = 3.83 \text{ s}$ （波高・水深比0.36）とした。なお、解析に用いたパラメーターは、 $\nu = 0.001 \text{ m}^2/\text{s}$ 、
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 、 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ である。

波高・水深比0.36の孤立波の伝播および鉛直壁での反射の状況を図-2に示す。この孤立波の形状について Boussinesq の厳密解と比較して、図-3に示す。さらに、今回得られた波高・水深比と打ち上り高さ・水深比の関係を実験結果や他の数値計算結果と比較して、図-4に示す。波高・水深比0.36については、良好な形状の孤立波が再現できたものと考えられる。波高・水深比が0.49のケースでは、打ち上り高さ・水深比が他の結果に比較して、小さくなった。これは、運動方程式中の粘性項の効果によるものと考えられる。

5. まとめ

自由表面を含む三次元粘性流体の解析手法を紹介した。解析例として、孤立波の伝播問題を示し、良好な結果が得られた。今後、有限振幅性の波の三次元挙動の解明のため、遡上や砕波の現象を表現できる手法および波が外部に透過できるような境界条件について検討を行い、三次元の波動シミュレーターを確立する予定である。

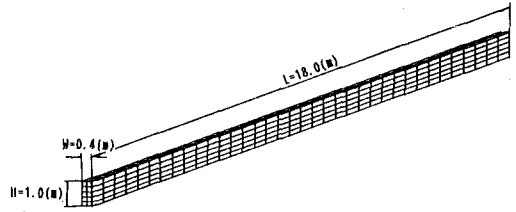


図-1 解析モデル

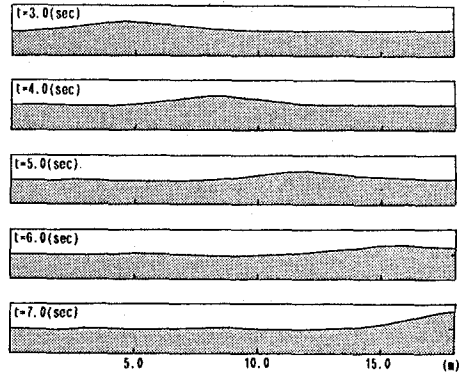


図-2 孤立波の伝播状況

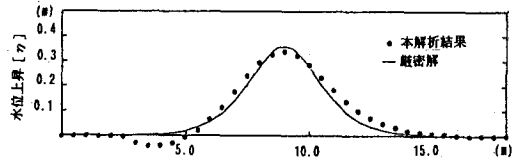


図-3 厳密解との比較

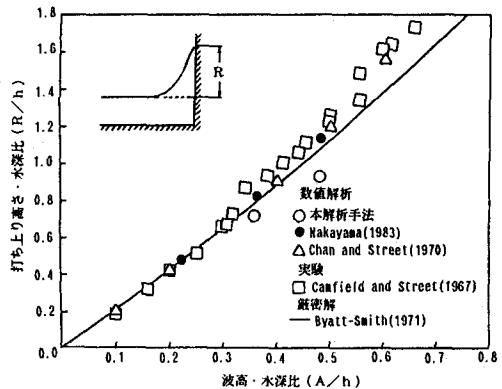


図-4 A/h と R/h の関係

参考文献1) Kawahara, M., Ramaswamy, B. and Ajiyu, A.; Lagrangian Finite Element Method for Wave Motion using Velocity Correction Method, Proc. JSCE, No. 369, 1986.

2) Nakayama, T.; Boundary Element Analysis of Nonlinear Water Wave Problem, Int. J. Num. Meth. in Eng., Vol. 19, 1983.