

II-343

浅水長波流れ解析への適応型有限要素法の適用について

広島工業大学 正会員 樫山和男
中央大学 正会員 川原陸人

1. はじめに

近年、津波、高潮、潮流、および河川流に代表される浅水長波流れを把握するための方法として、任意形状への適合性に優れている有限要素法が多く用いられるようになってきている。これらの流れ問題を把握することは、海岸・海洋・河川構造物の計画・設計および管理上重要であるばかりでなく、防災問題や環境問題にも関係するため、浅水長波流れを精度良く解析を行うことは、数値解析上の大きな課題の一つとなっている。

本報告は、上記の課題を克服するための方法として、浅水長波流れの有限要素解析に適応型計算法¹⁾を適用することの検討を行ったものである。適応型計算法は、計算結果から離散化誤差を評価して、その誤差が小さくなるように要素分割の再分割を行いながら計算を進める方法であり、自動的に解の精度の向上を図ることが可能となる。

2. 基礎方程式

基礎方程式としては、平均流に対する運動方程式と連続方程式を用いる。

$$\dot{U}_i + U_j U_{i,j} + g \zeta_{,i} + f_c U_i / (h + \zeta) - A_1 (U_{i,j} + U_{j,i})_{,j} = 0 \tag{1}$$

$$\dot{\zeta} + (h + \zeta) U_{i,i} = 0 \tag{2}$$

ここに、 U_i 、 ζ は断面平均流速、水位変動量であり、 f_c は底面摩擦係数、 A_1 は水平渦動粘性係数、 h は水深、 g は重力加速度である。また、 $\dot{}$ は時間に関する偏微分を表わす。

一般に、境界条件としては次式が与えられる。

$$U_i = \hat{U}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \tag{3}$$

$$\zeta = \hat{\zeta} \quad \text{on } \Gamma_2 \tag{4}$$

$$t_i = A_1 (U_{i,j} + U_{j,i}) n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } \Gamma_3 \tag{5}$$

ここに、 $\hat{}$ は境界で規定される値を表わし、 n_j は境界に立てた外向き法線ベクトルの方向余弦を表わす。

3. 適応型有限要素法

空間方向の離散化には、任意形状への適合性から三節点三角形の一次要素を用いたガラーキン法に基づく有限要素法を用いる。また、時間方向の離散化には2段階の陽的解法²⁾を用いる。

適応型計算法は、要素分割の再分割の違いにより、大きくr-法、h-法およびp-法の三つの分けられているが、本報告では、誤差の大きい要素に節点位置を移動させるr-法の適用を検討する。

要素分割の最適化問題は、各要素で評価される誤差測度に関するミニマックス問題として定義され、各要素における誤差が一定になるように節点位置の移動を行う。誤差測度としては水位変動量に関する補間誤差を用い、各要素における誤差測度を次式によって評価する¹⁾。

$$E_e = \left(\int_{\Omega_e} \{ (\mathbf{v}_h - \zeta)_{,i} \}^2 d\Omega \right)^{1/2} \tag{6}$$

ここに、 ζ は厳密解、 \mathbf{v}_h は ζ の補関数である。

r-法を適用する場合の節点の移動方法は、次式を用いる。

$$\mathbf{x}_p = \sum_{e=1}^{M_n} (E_e / A_e) \mathbf{x}_e / \sum_{e=1}^{M_n} (E_e / A_e) \tag{7}$$

ここに、 \mathbf{x}_p は節点pの新しい座標位置、 M_n は節点pに接続する要素数であり、 E_e 、 A_e 、 \mathbf{x}_e はそれぞれ接続する要素の誤差測度、面積及び重心位置である。また、 m は要素分割の平滑化のためのパラメータである(図-1参照)。図-1にお

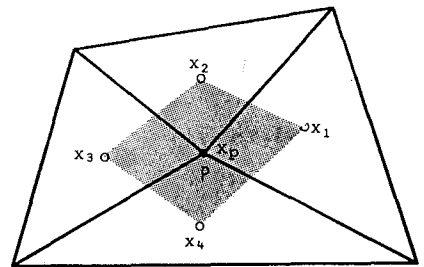


図-1 節点移動の方法

いて、黒くハッチした領域は、(7)式を適用した場合の節点 P の移動範囲を表わしている。

4. 数値計算例

本手法の有効性を検討するために、図-2に示す開水路内の流れ解析に適用を行った。要素総数は720、節点総数は415である。水深は全領域で一定とし、 $h=10\text{m}$ とした。計算条件として、流体は非粘性・非圧縮の完全流体を仮定した。また、境界条件は、流入口 A-Bで水平方向の流速 $U=1.0\text{m/s}$ を与え、流出口 C-Dで水位 $\zeta=0.0\text{m}$ を与えた。また、その他の境界上では、流速のスリップ条件を与えた。図-3は、数回の r-法を適用して、定常状態に達した時の要素分割図を示したものである。図より、断面が急拡・急縮している部分に節点が集中していることが分る。図-4および図-5は、その時の流速分布図と水位分布図である。そして、図-6に、r-法を適用した場合としなかった場合の境界 A-E上の水位の比較を示す。図中、●印は図-2の要素分割図を用いて定常状態に達した場合の結果であり、○印は r-法を適用した場合の結果である。図より、r-法を適用することにより、角点 (E点) 付近の解の振動現象が緩和されていることが分る。

5. おわりに

本報告において、有限要素法による長波流れの解析に r-法に基づく適応型計算法を適用することの検討を行った。適応型計算法を用いることにより、より信頼性の高い計算結果を得ることが可能となる。この手法は、解析解や実測結果の得られにくい長波流れの解析には有効な方法と考えられる。今後、より実際問題の解析に適用する所存である。

参考文献 1) Kashiya, K. and Kawahara, M. : Adaptive finite element method for linear water wave problems, Proc. JSCE, 387/2, pp.115-124, 1987. 2) Kawahara, M. et al. : Selective lumping finite element method for shallow water flow, Int. J. Numer. Methods. Fluids, Vol. 2, pp.89-112, 1982.

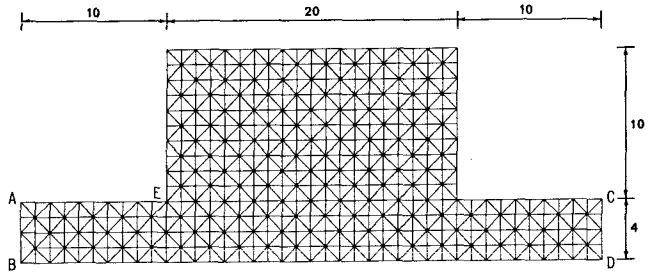


図-2 初期要素分割図

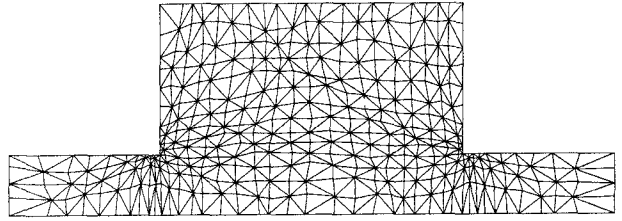


図-3 r-法適用後の要素分割図

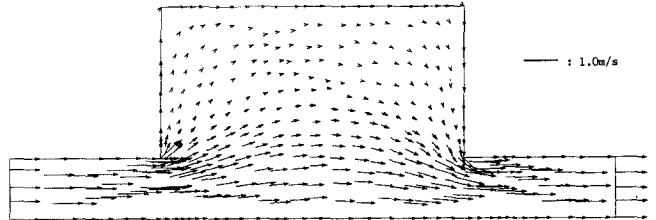


図-4 流速分布図

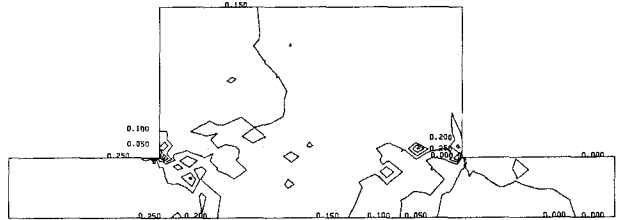


図-5 水位分布図

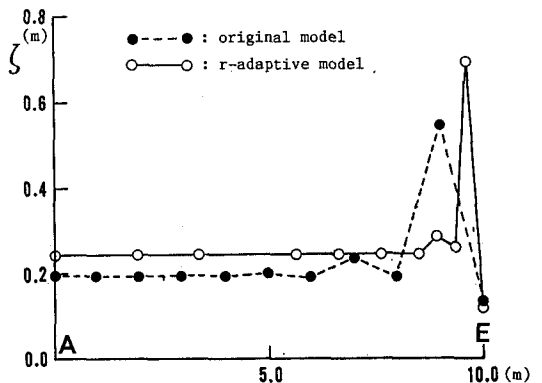


図-6 A-E上の水位の比較