

II-341 定常流れを考慮した周期的浅水長波の有限要素解析

佐藤工業(株) 正会員 金子典由
中央大学 正会員 川原睦人

1. はじめに

潮汐に起因する湾内の流況を予測するための周期的浅水長波方程式の有限要素解析手法について検討する。通常、浅水長波方程式の非定常解析は逐次時間積分法により行われる¹⁾。しかし、潮流解析に逐次時間積分法を用いると安定条件より時間間隔は相当小さく取らねばならないし一周期分が12時間と長時間におよぶので膨大な反復計算が必要となる。例えば最大水深が50m、要素の最少サイズを100 mとすると時間間隔は4秒以下となり、12時間周期のための繰り返し計算は10800回となる。さらに収束した解を得るためには数周期分の計算が必要となろう。

そこで、このような長周期の流れの潮流計算に対して周期的有限要素解析の適用を考えた。しかし、従来の線形な周期的浅水長波解析では河川や放水口などから定常な流入が考慮できなかった。本報告では定常な流れが考慮できる非線形の周期的浅水長波解析を示す。ここで用いた解析手法は著者らが開発した手法²⁾である。これは流速と水位を定常項と指数表示した周期成分で表わし、定常流を含んだ非線形項をそのまま残して計算するものである。

2. 支配方程式

浅水長波の支配方程式を以下に示す。

$$\text{運動方程式} \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + g \zeta_{,i} - \nu (u_{i,jj} + u_{j,ii}) = 0 \quad (1)$$

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \{ (h + \zeta) u_i \}_{,i} = 0 \quad (2)$$

周期成分に関する境界条件

$$u_i^{(1)} e^{i\omega t} = \hat{u}_i^{(1)} e^{i\omega t} \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

$$q_i^{(1)} e^{i\omega t} = \{-g \zeta^{(1)} \delta_{ij} + \nu (u_{i,jj}^{(1)} + u_{j,ii}^{(1)})\} n_j e^{i\omega t} = \hat{q}_i^{(1)} e^{i\omega t} \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

ここで、 u_i は流速、 ζ は水位、 g は重力加速度、 ν は渦動粘性係数、 h は水深である。なお流速と水位については以下のような定常解と周期解の線形結合で表わせるものと仮定する。

$$u_i = u_i^{(0)} + u_i^{(1)} e^{i\omega t}, \quad \zeta = \zeta^{(0)} + \zeta^{(1)} e^{i\omega t} \quad (5)$$

(5) 式を支配方程式に代入して同次の周期関数について整理する。

$$i \omega u_i^{(1)} + u_j^{(0)} u_{i,j}^{(1)} + u_j^{(1)} u_{i,j}^{(0)} + \zeta_{,i}^{(1)} + u_{i,jj}^{(1)} + u_{j,ii}^{(1)} = 0 \quad (6)$$

$$i \omega \zeta^{(1)} + \zeta^{(0)} u_{i,i}^{(1)} + \zeta^{(1)} u_{i,i}^{(0)} + \zeta_{,i}^{(1)} u_i^{(0)} + \zeta_{,i}^{(0)} u_i^{(1)} + h u_{i,i}^{(1)} = 0 \quad (7)$$

これらの方程式は定常解を含んでいるので、定常解が周期解に影響をおよぼすことが明らかである。これらの方程式に重み付き残差法を適用し、さらに流速は2次、水位は線形の形状関数で有限要素法のための離散化方程式を定式化した。

3. 計算結果

解析例として幅4 km, 奥行き32km, 水深10m の長方形湾の解析を行なった。要素分割図を図-1に示す。計算には渦動粘性係数 $100\text{m}^2/\text{秒}$, 重力加速度 $9.8\text{m}/\text{秒}^2$ を用いた。定常流れ ($u^{(0)}$) は右方向への一様流で,

1, 5, 10 m/秒の3ケースとした。これらの定常流れのもとで, 左端より $0.0 \sim 0.001$ /秒の周波数で流速振幅1 m/秒を与えて計算した。図-2に各々の周波数の下での湾奥の水位の増幅率を示した。定常流が小さいうちは影響はないが, 定常流が大きくなると長方形湾の振動モードが変化してくる。図-3と4に長方形湾の水位分布を示す。 $u^{(0)}=1\text{m}/\text{秒}$ は定常流の無い解析解とよく一致している (図-3) が $u^{(0)}=5\text{m}/\text{秒}$ では実数部分が增大してくる (図-4)。このことより定常流の影響で位相に遅れが生じ波動特性が変化したものと考えられる。

5. おわりに

非線形の周期的浅水長波解析を行なって, 定常解の周期解に及ぼす影響について検討した。その結果, 定常流れが遅いときは線形の周期解と定常解の単純な重ね合わせでよいが, 定常流れが速くなると定常解を考慮した非線形な周期解析が必要になることが分かった。

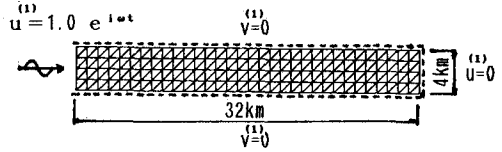


図-1 要素分割図

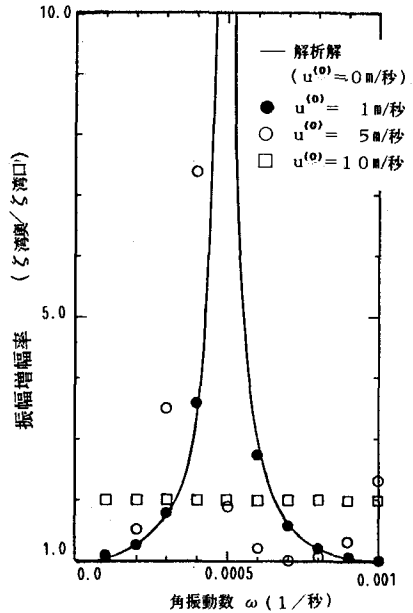


図-2 共振スペクトル図

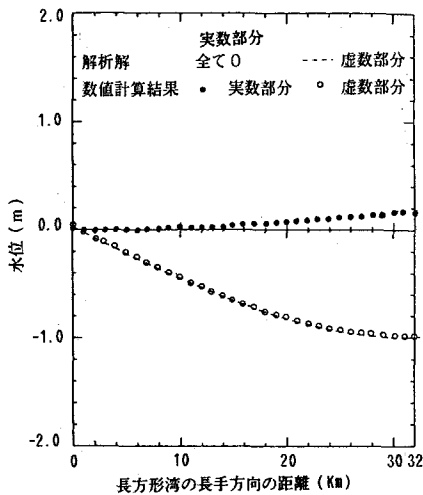


図-3 長方形湾の水位分布
(定常流れ $u^{(0)}=1\text{m}/\text{秒}$)

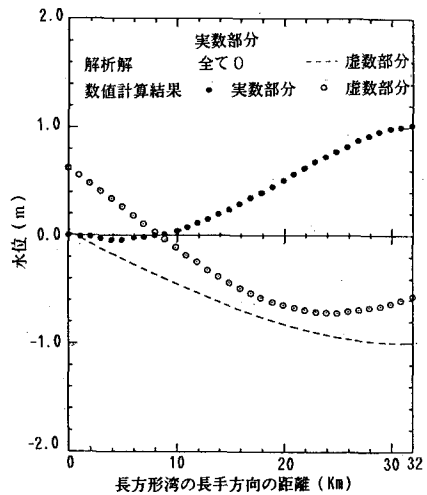


図-4 長方形湾の水位分布
(定常流れ $u^{(0)}=5\text{m}/\text{秒}$)

参考文献

- 1)川原”有限要素法による浅水長波方程式の解析”第1回数値流体力学シンポジウム, pp15~22, 1987
- 2)金子, 川原”周期的浅水長波方程式による潮流解析の一考察”第2回数値流体力学シンポジウム pp547~550, 1988