II-267　分離型法を用いた非圧縮粘性流れの有限要素解析

○ 中央大学　学生員　林　正宏
中央大学　正　員　川原睦人

1．はじめに

非圧縮粘性流れの解析は、工学の分野において重要な課題の一つである。本報文は、分離型法を用いた非圧縮粘性流れの有限要素解析を行うものである。この方法は、流速と圧力に対して同じ次数の補間関数を用いることができるということで、定式化やデータの作成が容易になり、計算の効率化が図れるという利点がある。そこで新しく圧力のポアソン方程式を導き出し、これと運動方程式を連立して解くことを考える。本手法の有効性を確認するために、二次元のキャビティ内流れの解析を行い、その結果について報告する。

2．基礎方程式と境界条件

基礎方程式は、ナビエ・ストークス方程式と連続の方程式を用いる。

$$\rho \dot{U}_i + \rho U_j U_{i,j} + P_{,i} - \mu (U_{i,j} + U_{j,i})_{,j} = 0 \tag{1}$$

$$U_{i,i} = 0 \tag{2}$$

ここで、U_iはx_i軸方向の流速成分、Pは圧力、ρは密度、μはせん断粘性係数を表す。また、添字のコンマは平面座標x_iによる微分を表す。解析する流れの場全体をV、その境界をSとする。境界Sは、流速の規定される境界S_1、圧力の規定される境界S_2で構成される。

$$U_i = \hat{U}_i \quad \text{on } S_1 \quad , \quad P = \hat{P} \quad \text{on } S_2 \tag{3),(4}$$

3．時間積分法

時間積分法には、分離型法を用いる。まず、圧力のポアソン方程式を導く。ナビエ・ストークス方程式の両辺について発散をとり、時間微分項について前進差分を適用し、連続の方程式を用いると次のような方程式が得られる。

$$P^{n+1}_{,ii} = \frac{\rho}{\Delta t} U^n_{i,i} - \rho U^n_{j,i} U^n_{i,j} - \rho U^n_j U^n_{i,ij} + \mu (U^n_{i,j} + U^n_{j,i})_{,ij} \tag{5}$$

次に、流速に対する方程式を導く。ナビエ・ストークス方程式の時間微分項について、前進差分を適用すると次のような方程式が得られる。

$$U^{n+1}_i = U^n_i - \Delta t \{U^n_j U^n_{i,j} + \frac{1}{\rho} P^{n+1}_{,i} - \nu (U^n_{i,j} + U^n_{j,i})_{,j}\} \tag{6}$$

以上の二式を用いて、流速と圧力を求める。

4．有限要素法の適用

(5)式について、重み付き残差方程式を誘導する。圧力のポアソン方程式に重み関数P^*を掛けて、領域Vについて積分する。そして得られた方程式の左辺項と右辺第三項、第四項について部分積分を施し、発散定理を適用し整理すると次のような方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_V (P^*_{,i} P^{n+1}_{,i}) dv = & - \frac{\rho}{\Delta t} \int_V (P^* U^n_{i,i}) dv - \rho \int_V (P^*_{,i} U^n_j U^n_{i,j}) dv \\ & + \mu \int_V P^*_{,i} (U^n_{i,j} + U^n_{j,i})_{,j} dv + \int_S (P^* P^n_{,i}) n_i ds \\ & + \rho \int_S (P^* U^n_j U^n_{i,j}) n_i ds - \mu \int_S P^* (U^n_{i,j} + U^n_{j,i})_{,j} n_i ds \end{aligned} \tag{7}$$

ここで、$(P_{,i} n_i)$は、ナビエ・ストークス方程式に、境界に立てた法線の方向余弦n_iを掛けた、次の方程式で表すことにする。

$$P_{,i} n_i = - \{\rho \dot{U}_i + \rho U_j U_{i,j} - \mu (U_{i,j} + U_{j,i})_{,j}\} n_i \tag{8}$$

(7)、(8)式から、境界積分項はそれぞれ消去することができ、残った時間積分項は境界上でゼロとおくことにする。また、一次多項式による補間関数を用いるので、粘性項は消去される。よって、次の圧力のポアソン方程式に対する重み付き残差方程式が得られる。

$$\int_V (P^*_{,i} P^{n+1}_{,i})\,dv = -\frac{\rho}{\Delta t}\int_V (P^* U^n_{i,i})\,dv - \rho \int_V (P^*_{,i} U^n_j U^n_{i,j})\,dv \qquad (9)$$

同様に流速に対する方程式の重み付き残差方程式を誘導する。次に、解析する流れの場全体を三角形要素に分割し、各要素内部の流速と圧力を一次多項式による補間関数で近似する。そしてガレルキン法により有限要素方程式を導く。

5．数値解析例

数値解析例として二次元正方形キャビティ内流れについて行った。初期条件と境界条件は、図１に示す。A－Bで流速U＝1、その他の境界では、流速U＝V＝0を与えた。また底面中央部に圧力P＝0を与えた。有限要素分割図は、図２に示す。時間増分量⊿ｔ=0.025、動粘性係数ν=0.001、レイノルズ数は1000である。図３は流速図、図４は圧力図である。それぞれ5000stepでの計算結果である。

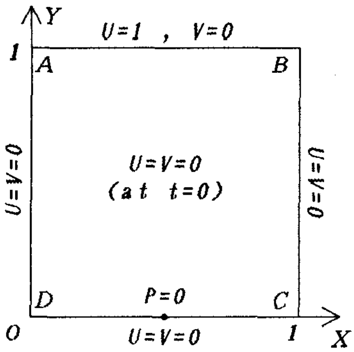
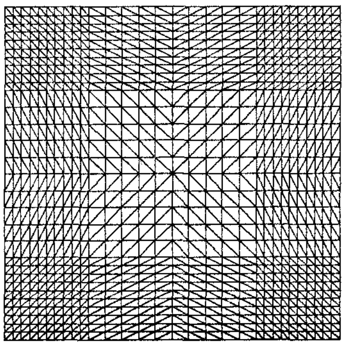


図１．初期条件と境界条件



総節点数
= 961
総要素数
=1800

図２．有限要素分割図

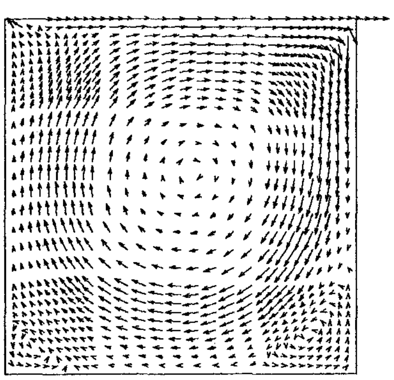


図３．流速図

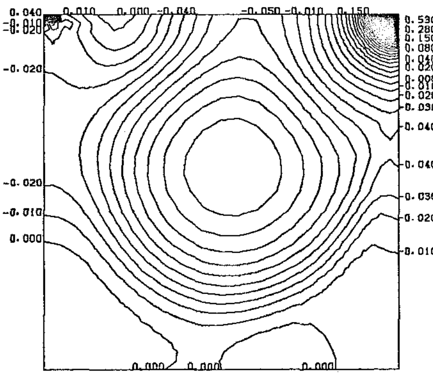


図４．圧力図

6．おわりに

分離型法を用いた非圧縮粘性流れの有限要素解析に対して新しい方法を提案した。また、キャビティ内流れに対して、その妥当性を示した。今回の解析では、圧力に対する境界条件を、底面中央部でP＝0として与えたが、参照点として領域のある点にP＝0を与えた場合と比べると、圧力図以外は同じ結果を得ていることがわかった。しかしながら、圧力をある任意の点で基準化すると同じ結果を得ることができた。つまり、本手法でキャビティ内流れの場合には、圧力に対する境界条件を領域内のどの点に与えても、同じ結果が得られるということがわかった。