II-266　2次元自由表面問題の有限要素解析

中央大学　学生員　畑中　勝守
中央大学　正　員　川原　睦人

1．　はじめに

構造物内部の自由表面を有する流体に，地震等の外力が作用して生じるスロッシング現象の解析は，工学上非常に重要な基本課題のひとつである。

本研究は，このようなスロッシング現象の数値解析を行うために，有限要素法をベースにした数値解析手法を提案し，その有効性を検討するものである。

今回は，特に2次元タンク内部の粘性流体の解析をLagrange 型の手法により解析したものを報告する。

2．　スロッシング現象の定式化

2-1．　時間方向離散化

流れを非定常非圧縮粘性流れとし，基礎方程式は，

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} P_{,i} + \nu(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j} + f_i \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

$$u_i = \hat{u}_i \quad on\ S_1 \quad (3)$$

$$\left\{-\frac{1}{\rho} P\delta_{ij} + \nu(u_{i,j}+u_{j,i})\right\} n_j = \hat{t}_i \quad on\ S_2 \quad (4)$$

とする。ここに，u_i は流速，P は圧力，ρ は密度，ν は粘性係数であり，f_i は外力である。また D/Dt は Lagrange 微分演算子であり，

$$\frac{Du_i}{Dt} \cong \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (5)$$

として取り扱う。更にクランク・ニコルソン法を用いて離散化すれば，

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} P_{,i}^{n+1}$$

$$+\nu(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}^{n+1/2} + f_i \quad (6)$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (7)$$

となる。ここで，(7) 式の粘性項は，

$$\nu(u_{i,j}+u_{j,i})^{n+1/2} =$$

$$\frac{1}{2}\nu\left\{(u_{i,j}+u_{j,i})^{n+1} + (u_{i,j}+u_{j,i})^n\right\} \quad (8)$$

と近似される。また，時刻 $t = n+1$ の流体粒子の位置 x_i は，次から計算される。

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \frac{\Delta t}{2}\left(u_i^{n+1} + u_i^n\right) \quad (9)$$

2-2．　計算のアルゴリズム

先のクランク・ニコルソン法によって定式化された方程式は，本来陰的に処理されるものであるが，本解析では流速修正法を用いて，より実用的に計算するものとする。

(a)　Predictor　step

まず，中間流速 $\tilde{u}_i^{(0)}$ を次式のように定める。

$$\tilde{u}_i^{(0)} = u_i^n + \Delta t\{-\frac{1}{\rho} P_{,i}^n$$

$$+\nu(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}^n + f_i\} \quad (10)$$

次に，ポテンシャル $\phi^{(0)}$ を次のポアソン方程式より求める。

$$\phi_{,ii}^{(0)} = -\tilde{u}_{i,i}^{(0)} \quad (11)$$

さらに流速 $u_i^{n+1(0)}$，圧力 $P^{n+1(0)}$ を

$$u_i^{n+1(0)} = \tilde{u}_i^{(0)} + \phi_{,i}^{(0)} \quad (12)$$

$$P^{n+1(0)} = P^n - \frac{\rho}{\Delta t}\phi^{(0)} \quad (13)$$

により計算する。また，位置 $x_i^{n+1(0)}$ は，

$$x_i^{n+1(0)} = x_i^n + \frac{\Delta t}{2}\left(u_i^{n+1(0)} + u_i^n\right) \quad (14)$$

より求められる。

(b)　Corrector　step

ここでは Predictor　Step で計算された第一修正子を更に修正し，時間近似の精度を高める。まず，中間流速 $\tilde{u}_i^{(m)}$ を

$$\tilde{u}_i^{(m)} = u_i^n + \Delta t[-\frac{1}{\rho} P_{,i}^{n+1(m-1)}$$

$$+\frac{\nu}{2}\{(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}^n$$

$$+(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}^{n+1(m-1)}\} + f_i\,] \quad (15)$$

より求め，ポテンシャル ϕ^m を

$$\phi_{,ii}^{(m)} = -\tilde{u}_{i,i}^{(m)} \quad (16)$$

より求める。次に流速 $u_i^{n+1(m)}$，圧力 $P^{n+1(m)}$ を

$$u_i^{n+1(m)} = \tilde{u}_i^{(m)} + \phi_{,i}^{(m)} \quad (17)$$

$$P^{n+1(m)} = P^n - \frac{\rho}{\Delta t}\phi^{(m)} \quad (18)$$

より計算する。さらに座標 $x_i^{n+1(m)}$ を，

$$x_i^{n+1(m)} = x_i^n + \frac{\Delta t}{2}\left(u_i^{n+1(m)} + u_i^n\right) \quad (19)$$

から計算し，$|u_i^{n+1(m)} - u_i^{n+1(m-1)}| < \varepsilon$ となるまで，Correction step を繰り返す。尚，空間方向の離散化には，前述のとおり有限要素法を用いるが，離散化された有限要素方程式は省略する。

3．　2次元タンク内部流体の解析

本手法の有効性の検証として，図1に示す条件を用い2次元タンク内部の流体のスロッシング解析を行った。解析に使用した諸条件は表1に示す通りである。解析結果は図2～5に示す。

4．　おわりに

自由表面問題の数値解析手法として，流速修正法による Lagrange 型有限要素法を提案し，2次元タンク内部流体のスロッシング現象の解析を示した。計算結果は実際の現象を非常に良く再現しており，本手法の妥当性は証明されたと思われる。今後は，もっと揺れの大きな解析を行い本手法の安定性を確認し，また別の自由表面問題を解析して，本手法の有効性を検討して行きたい。

＜参考文献＞

T.Okamoto , M.Kawahara ; " Sloshing Analysis by Lagrangian Finite Element Method " , Proc. ICCMFA Okayama, vol.2, pp.1049-1056, 1988

棚橋隆彦 他 ; " 自由表面を有する粘性流れの有限要素解析 " , 第2回計算力学シンポジウム報文集 , pp.109-116 , 1988

畑中勝守，川原睦人 ; " 流速修正法による熱対流有限要素解析 " , 土木学会第４３回年次講演会概要集第２部 , pp.504-505 , 1988

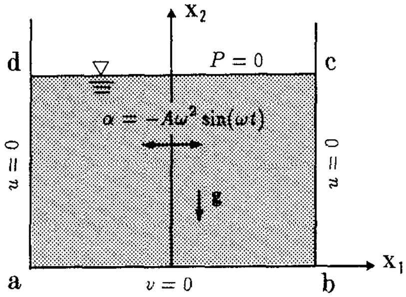

図1　解析領域

表1　解析条件

density	1,000 kg/m^3
viscousity	1.0×10^{-6} m^2/s
gravity accel.	-9.8 m/s^2
amplitude	0.93 cm
period	1.183 sec.
time increment	1.0×10^{-4} sec.

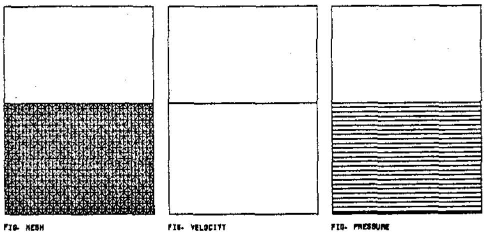

図2　解析結果 (t=0.00 sec.)

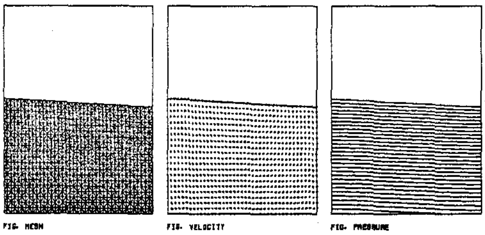

図3　解析結果 (t=0.50 sec.)

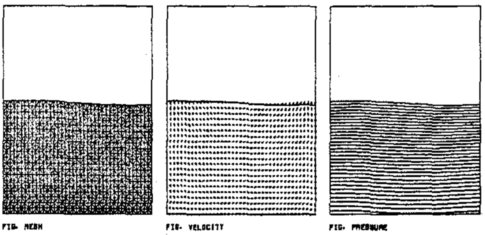

図4　解析結果 (t=0.75 sec.)

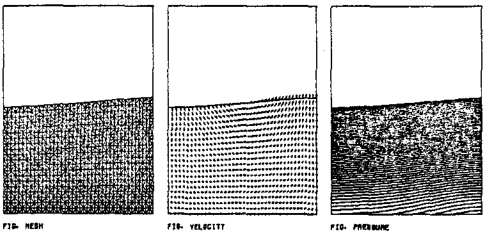

図5　解析結果 (t=1.00 sec.)