

中央大学 正 員 児玉敏雄

中央大学 正 員 川原睦人

1. はじめに

有限要素法や差分法などの数値計算手法により、波浪や潮流の解析を行う場合、解析領域は海と陸の境となる陸岸境界と外海に人為的に設けられた開境界によって設定される。非定常解析ではこの開境界において周期的な水位または平均流速が入射波の条件として与えられるのが一般的である¹⁾。解析の初期段階では入射波の条件を与えていればよいが、時間が進み内部の島や海岸線で反射した波が開境界に戻ってきた場合、入射波の条件をそのまま与えていたのでは外側に向う波が再度反射してしまう。このため再度反射した波によって解析領域内部の解が乱される場合がある。この現象を防ぐためには、開境界において外向きに進んできた波を外側に透過させる必要がある。谷本ら²⁾は差分法による波浪解析の開境界に対してこのような処理を施し、擬似の反射波が生じない入射波境界条件の処理を行っている。本研究では、有限要素法を用いた潮流解析に谷本らの方法を適用した。また、陸岸境界に対しては、任意反射率を考慮した境界条件を適用する手法の検証のため、一次元水路における重複波の計算を行い妥当性を確認した。

2. 基礎方程式および境界条件の処理

基礎方程式として以下に示す線形な浅海長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + g\eta_{,i} = 0, \text{ in } \Omega \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + hu_{i,1} = 0, \text{ in } \Omega \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ここで、 u_i ($i=1, 2$)、 η は平均流速および水位上昇量を表し、 g 、 h は重力加速度、水深をそれぞれ意味する。また、添字は総和規約に従うものとする。入射境界においては無反射性の条件を課し内部で生じた波をそのまま外向きに透過させなければならない。図-1のように沖側から振幅 a_i の入射波が x 軸と α_i の角度で進入するものとする。いま、 x 軸方向の流速成分 u_x と水位上昇量 η を考える。開境界上での流速、水位は次式に示すように入射波成分と反射波の和で表すことができる。

$$\bar{u}_x(x_0, t) = u_x^I(x_0, t) + u_x^R(x_0, t) \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

$$\bar{\eta}(x_0, t) = \eta^I(x_0, t) + \eta^R(x_0, t) \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

ここで、 I は入射波成分を、 R は反射波成分を意味する。当然ながら u_x^I 、 η^I は既知量である。開境界より x 内側の節点における反射波成分は計算値と入射波(既知量)の差として次式で求めることができる。

$$\Delta u_x = u_x(x_0 + \Delta x, t) - \frac{g}{c} a_i \cos \alpha_i \sin \{k_x(x_0 + \Delta x) + k_y y_0 - \omega t\} \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

$$\Delta \eta = \eta(x_0 + \Delta x, t) - a_i \sin \{k_x(x_0 + \Delta x) + k_y y_0 - \omega t\} \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

ここで、 $c = \sqrt{gh}$ は流速、 k_x 、 k_y は波数成分、 ω は角振動数である。 $\Delta x = c \cdot \Delta t$ が満足されていれば、開境界($x=x_0$)の流速および水位上昇量は次式で求めることができる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(x_0, t + \Delta t) &= u_x^I(x_0, t + \Delta t) + \Delta u_x \\ &= \frac{g}{c} a_i \cos \alpha_i \sin \{k_x x_0 + k_y y_0 - \omega(t + \Delta t)\} + \Delta u_x \quad \cdots \cdots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(x_0, t + \Delta t) &= \eta^I(x_0, t + \Delta t) + \Delta \eta \\ &= a_i \sin \{k_x x_0 + k_y y_0 - \omega(t + \Delta t)\} + \Delta \eta \quad \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

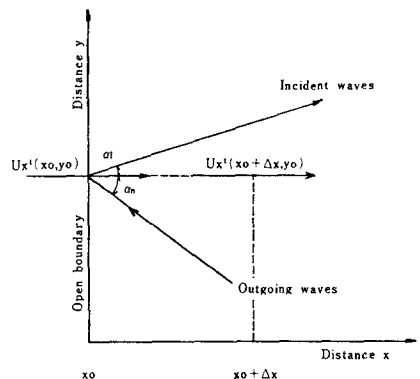


図-1 入射波境界

陸岸の境界条件に対しては、以下に示す任意反射率を考慮した処理を行う。

$$u_x(x_0, t) = Au^{-\tau}(x_0 - \Delta x, y_0) \quad \dots\dots\dots (9) \quad A = (1 - k_R) / \{1 + k_R^2 - 2k_R \cos(2k\Delta x \cos \alpha_n)\}^{1/2}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left\{ \frac{1 + k_R}{1 - k_R} \tan(k\Delta x \cos \alpha_n) \right\}$$

3. 有限要素法

基礎方程式(1), (2) に重み付き残差法を適用し、一次の形状関数を用いて空間方向の離散化を行う。また、時間方向に対し著者の一人が提案している2段階陽的解法³⁾を適用すると以下に示す有限要素方程式が得られる。(10)-(13)を逐次時間毎に解くことにより解析を進める。

(第1段階)

$$\bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}^{n+1/2} = \bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} H_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^n \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^{n+1/2} = \bar{M}_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} I_{\alpha\beta} u_{\beta}^n \quad \dots\dots\dots (11)$$

(第2段階)

$$\bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}^{n+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}^n - \Delta t H_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^{n+1/2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^{n+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^n - \Delta t I_{\alpha\beta} u_{\beta}^{n+1/2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\bar{M} = e\bar{M} + (1-e)M \quad \dots\dots\dots (14)$$

4. 数値計算例

本手法の検証のため、一次元水路における重複波のシミュレーションを行う。図-2に長方形水路の有限要素分割を示す。水路の水深は一定で $h=10\text{m}$ とする。境界条件は、境界 $\overline{AB}$ で周期 $T=1$ 秒、振幅 $A=0.1\text{m}$ の $\sin$ 波を入射波として与え、境界 $\overline{CD}$ では任意反射率を与える。また境界 $\overline{AD}$ 及び $\overline{BC}$ では法線方向の流速を零とする。計算には微少時間増分 $\Delta t=0.005$ 秒、パラメータ $e=0.9$ を用いる。図-3に境界 $\overline{CD}$ の反射率 $K_R=1.0$ の場合において重複波が形成された時点での水位を示す。計算値と解析解がよく一致していることがわかる。図-4には境界 $\overline{CD}$ の反射率を $K_R=0.2, 0.6, 1.0$ と変化させた場合の水位を示す。計算によって得られた水位は、反射率に対応した結果となっている。

5. おわりに

有限要素法による潮流解析の開境界に対して、反射波の透過を考慮した手法を適用した。また陸岸境界に対して任意反射率を設定した。手法の検証のため一次元水路における重複波の計算を行い妥当な結果を得た。本手法を用いることにより、精度の高い潮流の非定常解析を行うことができるものとする。今後、非線形項を考慮した場合について本手法を適用し計算精度の向上を計る考えである。

参考文献

- 1) M. Kawahara, M. Kobayashi and K. Nakata; Multiple Level Finite Element Analysis and Its Applications to Tidal Current Flow in Tokyo Bay, Appl. Math. Modelling 7, pp. 197-211(1983).
- 2) 谷本, 小舟; 数値波動解析法による港内波高分布の計算、第22回海岸工学講演会論文集, pp. 385-390(1978).
- 3) M. Kawahara, H. Hirano, K. Tsubota and K. Inagaki; Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow, Int. J. Numer. Meth. Enging., 12, pp. 331-351(1982).

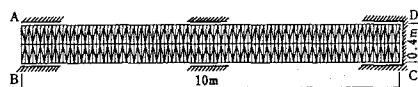


図-2 長方形水路モデル

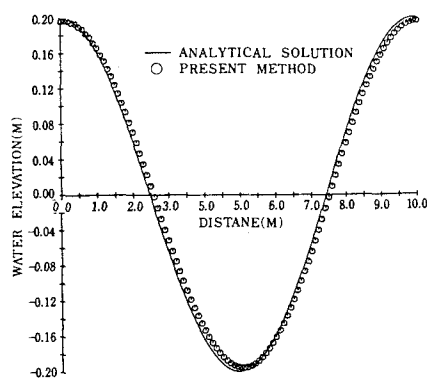


図-3 重複波の水位

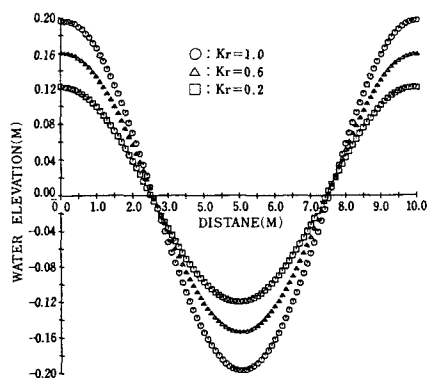


図-4 反射率の違いによる水位の変化