

II-263

非線型移流項の高精度数値解法について

佐賀大学 大串 浩一郎
九州大学 小松 利光
九州工業大学 朝位 孝二

1. 序

平均流による物理量の輸送、即ち移流は、水理学の実際的な問題において重要な役割を果たすことが多い。河川や湖沼における輸送問題や、開水路の非定常問題において、質量もしくは運動量の保存式は移流項を含んでいる。それらの移流項は正確に評価されなければならないにもかかわらず、その数値的取り扱いには非常に困難である。しかしながら、近年、線型の移流方程式の計算においては、特性曲線法に基づいたいくつかの精度の良い計算法が開発されてきた(Holly and Preissmann¹⁾、小松ら²⁾)。

一方、非線型の移流計算についても、容易で精度の良いスキームの開発に多くの努力がなされてきたが(Cunge et al.³⁾、Roache⁴⁾)、精度や計算コストの面でまだ改善の余地が残されていると言える。Toda-Holly⁵⁾は、特性曲線法に基づいたHolly-Preissmannのスキームを非線型方程式の解法へ拡張し、線型と同様高い精度で計算が可能なることを示した。しかし、この方法は、各格子点で各時間ステップ毎にクーラン数に関する3次方程式を解く必要があり、また、純粋移流の場合にはクーラン数に対する制約が厳しかった。しかもこのスキームの性質上、従属変数の勾配まで移流計算する必要があり、結果として精度を落としてしまう可能性が強かった。

本研究では、Toda-Hollyのスキーム以上の高精度を有し、計算が大幅に簡便化された新しい計算法を提案する。

2. 計算法の記述と解析

まず最も簡単な非線型方程式の一つである1次元のバーガーズ方程式について考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここで、 $u(x, t)$ は流速、 ν は拡散係数である。(1)式の特性曲線表示は

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad (2)$$

上で

$$\frac{du}{dt} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

である。スプリット・オペレーター・アプローチでは、移流と拡散を各時間ステップ毎に各々別個に取り扱う。すなわち、

[1] 移流の計算段階

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

上で

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (4)$$

[2] 拡散の計算段階

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5)$$

[1] について

(4)式は特性曲線(2)上で流速 $u = \text{const.}$ を意味している。図-1における破線は、点 (x_i, t_{n+1}) に到達する特性曲線を表しており、この曲線の $t = t_n$ における位置を $x = \xi$ とすれば次式が得られる。

$$u_i^{n+1} = u_\xi \quad (6)$$

ここで、添字 n は時間 t_n を表し、 i は計算格子点 x_i を表す。 u_ξ は、特性曲線の $x = \xi$ における流速である。

6-Point Schemeは、この格子上にない流速 u_ξ を格子上の既知の値で内挿する方法である。

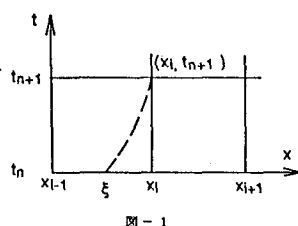


図-1

$$u_\xi = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 \quad (7)$$

ここで、 α はクーラン数、 $a_0 \sim a_3$ は既知の流速の値から求まる係数である：

$$\alpha = (x_i - \xi) / (x_i - x_{i-1})$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.05633 & -0.3097 & 1.033 & -0.2869 \\ -0.03828 & 0.05276 & 0.6480 & -1.394 \\ -0.01806 & 0.2570 & -0.6806 & 0.6806 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-3}^n & u_{i-2}^n & u_{i-1}^n & u_i^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{i-3}^n & u_{i-2}^n & u_{i-1}^n & u_i^n & u_{i+1}^n & u_{i+2}^n \end{bmatrix}^T$$

しかし、ここで、クーラン数 α は、残念ながら、未知数である。何故なら、 α は従属変数 u の無次元表示に他ならないからである。Toda-Hollyは、Holly-Preissmannのスキームに基づいた(7)式の3次方程式を解いて α の値を求めているが、本研究では、まず(1)式の左辺を風上差分で差分化することにより、第1近似 $\bar{u}_i^{n+1}$ を求め、

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_\xi \quad (8)$$

であることから次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{u}_\xi &= \bar{u}_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{(u_i^n)^2}{2} - \frac{(u_{i-1}^n)^2}{2} \right) \\ \bar{\alpha} &= \frac{\bar{u}_\xi \Delta t}{\Delta x} \end{aligned} \quad (9)$$

続いて、(9)式を(7)式に代入し $\hat{u}_\xi$ を求める。

$$\hat{u}_\xi = a_0 + a_1 \bar{\alpha} + a_2 \bar{\alpha}^2 + a_3 \bar{\alpha}^3 \quad (10)$$

精度の向上のため、(8)式と(10)式の荷重平均をとる。

$$\bar{u}_i^{n+1} = \kappa \bar{u}_\xi + (1 - \kappa) \hat{u}_\xi \quad (11)$$

荷重 κ は、多くの数値実験の結果、次の値が最良だった。

$$\kappa = 0.72 \quad (12)$$

[2] について

(5)式の拡散の計算については、通常のCrank-Nichols onのスキームを用いる。すなわち、

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \nu \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x} \right\} \quad (13)$$

未知変数は $(n+1)$ 時間ステップの流速であり、上下流端で境界条件を与えて(13)式を系全体で連立方程式として解くことにより容易に未知流速が求まる。

以上、[1]と[2]の過程を Δt 毎に交互に計算していけば、(1)式の計算が可能となる。

3. モデル計算例

いくつかの厳密解が分かっている非線型のモデル計算を行い、前述の計算法の適用性について検討した。

a) 急峻なフロントをもつ波の伝播 (Lax⁶⁾)

拡散なしに下流へ伝わる理想化された衝撃波の例を考える。初期条件

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x-x_0) < 0 \\ 0 & \text{for } (x-x_0) \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

の時、解析解は次のように求まっている。

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x-x_0)/t \leq 1/2 \\ 0 & \text{for } (x-x_0)/t > 1/2 \end{cases} \quad (15)$$

式(15)は、解析解は波速1/2で下流へ伝播する不連続波であることを示している。共通のパラメーターとして $x_0=2$ Δx 、境界条件 $u(0,t)=1.0$ を用いた。二つの Δt に対する計算結果が図-2と図-3である。図-2において、Lax-Wendroffのスキームは、位相誤差は然程ない代わりに振幅誤差が見られる。一方、Toda-Hollyのスキームや式(11)による計算結果は振幅誤差に対しては非常に良い精度を示している。ただ、Toda-Hollyのスキームは式(11)のスキームに比べてより大きい位相誤差がある。また、図-3では、Lax-Wendroffのスキームは大きい振幅誤差を生じ、一方、その他のスキームは図-2と同様の結果を与えている。

b) 非線型移流拡散の例 (Lohar and Jain⁷)

非線型の移流拡散の一例として、次に示すケースがテストされた。初期条件が次式の時、

$$u(x,1) = \frac{x}{1+t_0^{1/2} \exp(x^2/4\nu)}, \quad t_0 = \exp(1/8\nu) \quad (16)$$

式(1)の解析解は次式で与えられる。

$$u(x,t) = \frac{x/t}{1 + \exp(x^2/4\nu t) (t/t_0)^{1/2}} \quad (17)$$

これは、圧縮性流体中を下流へ伝わる理想化された衝撃波で、小さな拡散がある場合を示している。境界条件として、 $u(0,t)=0.0$ 、 $u(\infty,t)=0.0$ を用いた。二つの ν に対する計算結果が図-4と図-5である。図-4では、どのスキームの計算結果も解析解と良く一致している。図-5は拡散がより小さい場合であり、各々のスキームの計算結果については次のように考察される。すなわち、Lax-Wendroffのスキームは図-2や図-3と同様、急峻なフロントの近くで振動解を引き起こす性質が残っている。本研究で提案している式(11)と式(13)による移流拡散の計算結果は、ほぼ解析解との一致を見ている。

4. 結論

風上差分スキームと6-Point Schemeを組み合わせたハイブリッド・スキームを応用することにより、1次元の非線型移流拡散の問題を解く新しい計算法を開発することができた。この計算法は、他のスキームと比較してより高い精度を有し、振幅や位相の誤差は非常に小さい。この計算法は、Toda-Hollyのスキームのようにクーラン数に関する3次方程式を解く必要はなく、また、速度勾配の移流計算もしなくて良い。この計算法の一部である1次精度の風上差分スキームは粘性を陰に含んでいる為スムージング効果を有し、6-Point Schemeの正確な内挿との丁度良い釣合によって、このような良好な結果が得られたものと思われる。

5. 参考文献

1. Holly Jr., F.M. and A. Preissmann: J. Div., ASCE, Vol. 98,

HY11, 1977., 2. Komatsu, T. et al.: JHHE, Vol. 3, No. 2, 1985., 3. Cunge, J.A. et al.: Practical Aspects of Computational River Hydraulics, IHR, Iowa, 1980., 4. Roache, P.J.: Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, NM, 1972., 5. Toda, K. and F.M. Holly Jr.: JHHE, Vol. 6, No. 1, 1988., 6. Lax, P.D.: Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. 7, 1954., 7. Lohar, B.L. and P.C. Jain: J. Comp. Phys., Vol. 39, 1981.

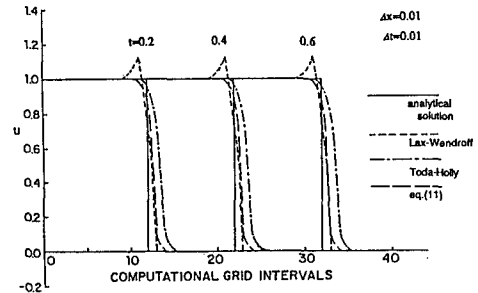


図-2

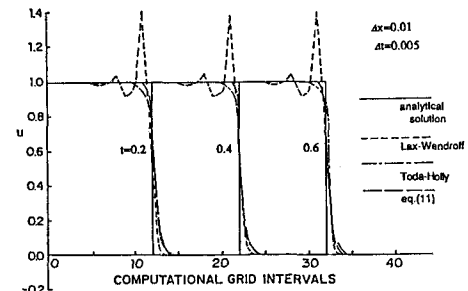


図-3

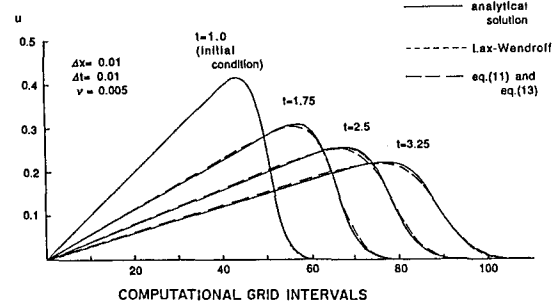


図-4

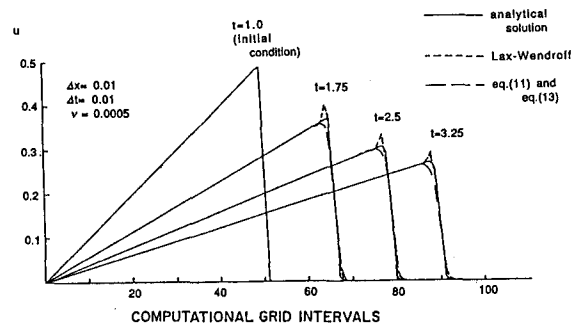


図-5