

II-262 コロケイト・グリッドを用いた数値解析法

東京大学大学院 学生員 清水 光
B & C 外村 仁
東京大学工学部 正 員 河原能久

I. 本研究の目的

現在有限体積法を用いて行なわれる数値計算の大部分は、パタンカー¹⁾らによって提唱された圧力場Pと速度場U、Vなどを半グリッドずらしたいくつかのコントロール・ボリュームを用いるスタガードグリッドによる方法によってなされている。一方近年ハードウェアが発達し、生活がインテリジェント化するにつれ、数値計算による複雑な流れ場の計算の必要性が生じてきている。しかしながら上にあげたスタガード・グリッドでは多くのコントロール・ボリュームを用いなければならず²⁾、グリッド生成に多くの労力を要し、また境界面との隙間が残るなどの不明解な点が残っている。今回我々はこれらの不都合な点を補うためにコロケイト・グリッドによる解析³⁾を紹介する。

II. コロケイト・グリッドの特徴

①全ての変数を同じ格子点に格納するのでコントロール・ボリュームはただ一組だけでよい。このため座標生成での労力を省くことができる。②またこのため全ての変数について対流流束F、全流束が等しくなるため離散化式の係数を一度に計算することができ、計算時間の節約になる。③全ての変数のコントロール・ボリュームの界面と境界面を一致させることができ、物理的な不明確さがなくなる。またさらに高精度の演算スキームを用いる際にも有利であると考えられる。

以上のように多くの長所を持つにも関わらず現在余りコロケイト・グリッドが用いられていない理由としては、コントロール・ボリュームの界面eとwが各格子点間の中央にあるとすると

$$p_w - p_e = \frac{p_w + p_p}{2} - \frac{p_p + p_e}{2} = \frac{p_w - p_e}{2}$$

となり、波状圧力場を関知できない、ということが上げられる。そこで今回我々は従来のアルゴリズムに若干の修正を加え、コロケイト・グリッドを用いての計算を試みた。

III. 解析条件及びアルゴリズム

解析はINABAら(1984)⁴⁾が行なった実験と条件を同一にし、結果の比較を行なった。図1に示す角度 θ に傾けられた、側面が断熱材、上面を 0°C に固定した $1.5 \times 1.5 \text{cm}$ のキャビティ内で、底面の温度を 4°C から 14°C の5通りに変化させ θ の変化とともに対流の様子がどのように変化するかを計算する。このとき連続式、X・Y方向の運動方程式、エネルギー方程式はそれぞれ(1)~(4)のようになる。

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = +\rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho c u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c v T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (4)$$

これらは統一的に(5)の様に表され、これを用いて式を離散化する。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] = S(\Phi) \quad (5)$$

物性値は μ , ρ についてはTの4次式、 κ , c についてはTの二次式で近似した。アルゴリズムで通常のスタガード格子の物と異なる点は、TDMAを用いて連立方程式を解く際に、一つおきの圧力差を生成項として計算する点である。この計算の後、従来のスタガード格子の考え方と同様に、コントロール・ボリュームの界面速度を両端の格子点での圧力差によって求め、前に記した波状圧力場を防いでいる。

IV. 解析結果

図2に示す通り、水の密度 ρ は4℃付近でピークを持つTの関数である。このため底面付近の温度 T_h 及び傾き θ の変化につれて様々な対流をおこす。代表的な例として $\theta=90^\circ$ の場合を上げると、 $T_h=4^\circ\text{C}$ の際には暖められた水の比重が重くなり時計回りの対流をおこす。 $T_h=8^\circ\text{C}$ では水の比重が 0°C とほぼ等しくなり、二対の逆向きの対流をおこすようになる。これを図3に示す。 $T_h=14^\circ\text{C}$ においては暖められて比重の軽くなった水が上昇し、時計回りの対流をおこす。これらの計算結果は可視化による実験結果と良好に一致する。流れ場は $T_h=8^\circ\text{C}$ に於て最大流速 0.03cm/s 程度のものである。計算は打ち切り誤差 1.0D^{-5} で行なったが、数値誤差により残差が増加するケースは見られなかった。

V. まとめ

本研究において我々は従来ほとんど用いられなかったコロケイト・グリッドによる数値計算プログラムを開発し、実験結果と良好に一致することを確かめた。コロケイト・グリッドによるプログラミングはコントロール・ボリュームが一組で済むという利点から、計算の高速化や複雑な形状の河道での計算を省力化するという利点を持つ。

参考文献) 1) V. バタンカー コンピューターによる熱移動と流れの数値解析 森北出版

2) I. Demirdzic et al. 'A calculation procedure for turbulent flow in complex geometries' (1987) Computers and Fluids Vol. 15, No. 3 pp251-273 3) M. Peric et al. 'Comparison of Finite-Volume numerical methods with staggered and collocated grids' (1988) Computers and Fluids, Vol. 16, No. 4, pp389-403 4) H. Inaba and T. Fukuda 'Natural convection in an inclined square cavity in regions of density inversion of water' J. F. M. (1984) vol. 142, pp363-381

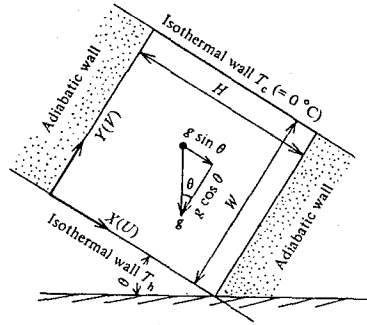


図1 解析条件

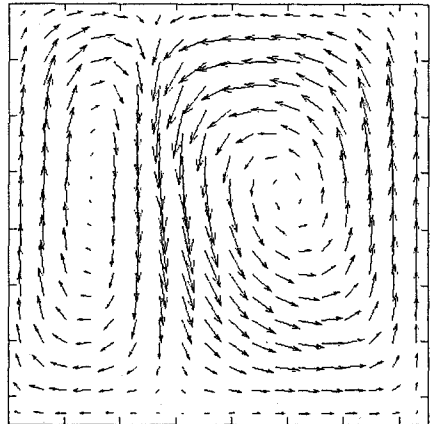


図2 計算結果 (Th=8, theta=90)

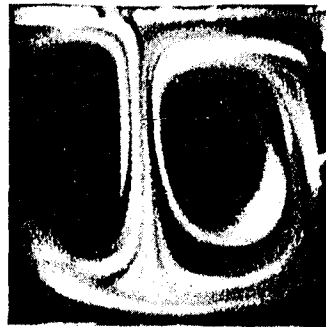


図3 実験結果 (Th=8, theta=90)