II-260 共役勾配法と有限要素法を用いた貯水池の洪水調節

中央大学 学生員 川崎 友之
中央大学 学生員 梅津 剛
中央大学 正 員 川原 睦人

1．はじめに

現在、多くの場合、洪水時のダム管理は、過去の洪水資料を基にして検討された操作規定に従って行われている。しかし、このような過去の実績に重点を置く固定的な調節方式では、調節効果を十分に発揮できないことがある。そこで、それに加えて、最適制御理論を効果的に用いるのである。本研究は、共役勾配法と有限要素法を用いて貯水池内の洪水調節の検討をおこなった。解析には、１次元の簡単なモデルを用いた。

2．基礎方程式と境界条件

従来、貯水池内における洪水の伝播解析は、浅水長波方程式により表せる。そこで、次式の線形化された１次元の浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial q}{\partial t}+gh\frac{\partial \xi}{\partial X}=0 \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial X}=0 \tag{1}$$

ここに、q:流量、ξ:水位変動量、h:水深、g:重力加速度である。上流側境界S_1では、洪水の流入量を与える。洪水調節は、ダムに装備された水門等の最適な操作で決まる放流量でおこなう。それを下流側境界S_Cに与える。なお、＾は境界で与えた値、￣はコントロールによって得られた値を示す。

$$\begin{aligned} q&=\hat{q} \quad &\text{on}\quad S_1 \\ q&=\overline{q} \quad &\text{on}\quad S_C \end{aligned} \tag{2}$$

式(1)を空間方向にGalerkin法を用いた有限要素法により解くと、次のような有限要素方程式を得る。

$$[M]\{\dot{X}(t)\}+[H]\{X(t)\}+[A]\{F(t)\}+[B]\{U(t)\}=\{0\} \tag{3}$$

ここに、

$$\{X(t)\}=\begin{Bmatrix} q(t) \\ \xi(t) \end{Bmatrix} \quad , \quad \{F(t)\}=\begin{Bmatrix} \hat{q}(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{U(t)\}=\begin{Bmatrix} \overline{q}(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

であり、q(t)、ξ(t)は解析領域の節点の流量と水位変動量である。

3．最適制御理論

本手法の最適制御は、状態方程式(3)のもとで、２次形式の評価関数(4)を最小にするコントロール変数(放流量) U(t) を決定するものである。

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(\{\xi(t)\}^T[S]\{\xi(t)\}+\{U(t)\}^T[R]\{U(t)\})dt \tag{4}$$

ここで、[S][R] は重み係数行列である。ラグランジュ乗数P(t)を導入し、ハミルトニアンHを定義する。

$$\begin{aligned} H=&-\frac{1}{2}(\{\xi(t)\}^T[S]\{\xi(t)\}+\{U(t)\}^T[R]\{U(t)\}) \\ &+\{P(t)\}^T(-[M]^{-1}[H]\{X(t)\}-[M]^{-1}[A]\{F(t)\}-[M]^{-1}[B]\{U(t)\}) \end{aligned} \tag{5}$$

オイラーの方程式、横断性の条件より、

$$\{\dot{P}(t)\}=-\frac{\partial H}{\partial X}=([M]^{-1}[H])^T\{P(t)\}+[K]\{X(t)\} \tag{6}$$

$$\{P(t_f)\}=\{0\} \tag{7}$$

を得る。評価関数の勾配$J_u(t)$は、

$$J_u(t) = -\frac{\partial H}{\partial U} = [R]\{U(t)\}+([M]^{-1}[B])^T\{P(t)\} \tag{8}$$

である。この評価関数の勾配$J_u(t)$を共役勾配法によって十分に0に近づくまでくり返し計算をして、最適コントロール(放流量)$U(t)$を求める。なお、式(3)(6)の時間方向の離散化には、二段階陽的解法を適用する。

4．数値解析例

図1の簡単な1次元の貯水池を用いた。有限要素分割は、総節点数と総要素数をそれぞれ101と100とした。重み係数行列Sは単位行列、Rには1.0×10^{-7}を用いた。微小時間増分量は 2.4sec.とし解析時間を10時間とした。流入地点の境界条件$\hat{q}(t)$は流入量であり図2に示す。コントロール地点の境界条件$\overline{q}(t)$はコントロールされた最適な放流量であり、図3に示す。これより得られた貯水池内の水位変動量は、流入地点、コントロール地点、観測地点で調べ、図4に示す。なお、コントロールによって得られた最適放流は、自然放流と比較し、調節効果をみる。

5．おわりに

本手法により、貯水池内の洪水水位は非常に良くコントロールされた。今後は、下流域も考慮に含めた総合的な洪水調節の検討をおこなう。

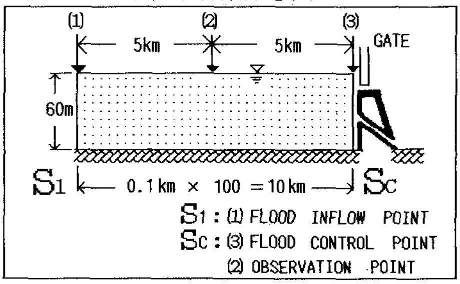

図1　貯水池

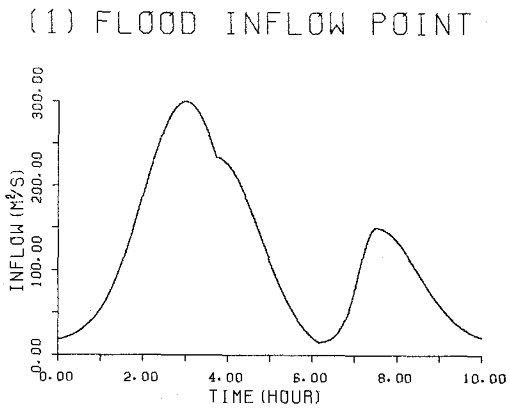

図2　流入量

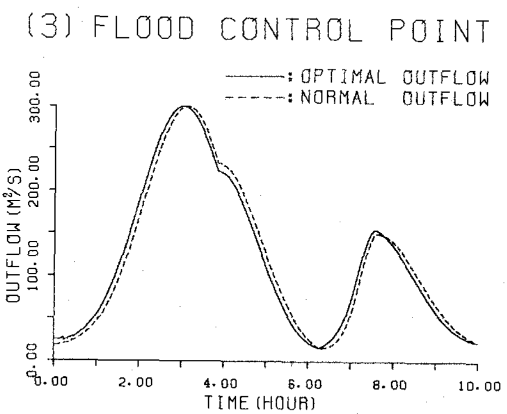

図3　放流量

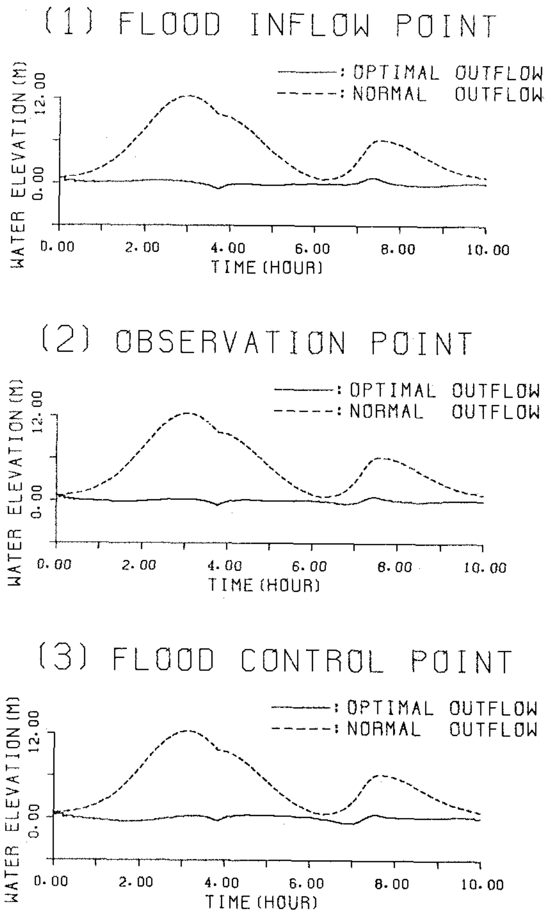

図4　水位変動量