II-259　ダム水門による洪水の最適制御

○中央大学　学生員　田中裕二
中央大学　学生員　梅津　剛
中央大学　　正員　川原睦人

1．はじめに　ダム水門による洪水の制御には様々な方法があるが、これらの方法のほとんどは、過去のデータにもとずいてダム管理人が、水門を操作するものである。しかしここ数年、水文統計学の発達とともに、電気電子工学の分野で発達している最適制御理論を応用し、洪水を積極的に制御しようとする方法が検討されはじめている。そこで本研究では、放流量を制御する事によってダム上流部においての水位変動を最適に制御する事を目的とし、有限要素法と最適制御理論を用いて解析を行ったので報告する。

2．基礎方程式　本研究では、洪水の挙動を表すのに線形の浅水長波方程式を用いた。一般に浅水長波方程式は、総和規約と添字記法用いると次のように書き表わす事が出来る。

$$\dot{q}_i + g\,h\,\zeta_{,i} = 0 \qquad (1)$$

$$\dot{\zeta} + q_{i,i} = 0 \qquad (2)$$

ここで、q　と　ζ　は、平均流量と水位変動量を表すベクトル、g　は、重力加速度、h　は、水深を表している。

3．有限要素法　ガレルキン法にもとずく有限要素法を用いて基礎方程式を離散化し、制御流量を考慮すると、次の有限要素方程式を得ることが出来る。

$$M\dot{x}_{(t)} + H' x_{(t)} + \overline{H}\,\overline{x}_{(t)} = 0 \qquad (3)$$

ここで、$x_{(t)} = (q_{\beta i(t)},\ \zeta_{\beta(t)})$、M　は、質量行列、H’　と　$\overline{\mathrm{H}}$　は、空間微分項、$\overline{\mathrm{x}}$　は、制御流量である。貯水池に流入する洪水を考慮すると（３）式は、次のように変形される。

$$\dot{x}_{(t)} = A\,x_{(t)} + B\,u_{(t)} + f_{(t)} \qquad (4)$$

ここで、$A = -M^{-1}H'$,　$B = -M^{-1}\overline{H}$　、　u　は、制御流量、$f_{(t)}$ は、流入する洪水を表している。
初期条件は、次式で与えられる。

$$x_{(t_0)} = \hat{x} \qquad (5)$$

4．最適制御理論　次に、最適制御の評価関数として次のような関数を設定する。

$$J_{(\zeta,u)} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (\zeta^T_{(t)} S\,\zeta_{(t)} + u^T_{(t)} R\,u_{(t)})\,dt \qquad (6)$$

ここで、S　と　R　は、重み係数行列、t_0　と　t_f　は、制御時間の始点と終点である。すなわちダム水門の最適制御問題は、（４），（５）式のもとで（６）式を最少にする操作量を決定する問題として定式化される。次に、この最適制御問題を解くためにラグランジュ乗数　p　を導入し、ハミルトニアン H を次のように定義する。

$$H = \frac{1}{2}\zeta^T S\,\zeta + \frac{1}{2}u^T R\,u + p^T (A\,x + B\,u + f) \qquad (7)$$

オイラーの方程式と横断性の条件より次式が得られる。

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -S\,\zeta - A^T p \qquad (8)$$

$$p_{(t_f)} = 0 \qquad (9)$$

（４），（５）式と（８），（９）式は、２点境界値問題である。この問題の解法として本研究では、二段階陽的解法を用いた。

第一段階

$$\overline{M}\,x^{n+\frac{1}{2}} = \widetilde{M}\,x^n - \frac{\Delta t}{2}(H' x^n + \overline{H}\,x^n) \qquad (10)$$

$$p^{n+\frac{1}{2}} = \widetilde{M}^T\,\overline{M}^{-T}\,p^n + \frac{\Delta t}{2}(H^T\,\overline{M}^{-T}\,p^n + S' x^n) \qquad (11)$$

第二段階

$$\overline{M}\,x^{n+1} = \widetilde{M}\,x^{n} - \Delta t\ (H' x^{n+\frac{1}{2}} + \overline{H}\,x^{n+\frac{1}{2}}) \tag{12}$$

$$p^{n+1} = \widetilde{M}^{T}\,\overline{M}^{-T}\,p^{n} + \Delta t\ (\,H'^{T}\,\overline{M}^{-T}\,p^{n+\frac{1}{2}} + S'\,x^{n}\,) \tag{13}$$

ここで、$\overline{M}$ は、M の集中化行列であり $\widetilde{M}$ は、次式で与えられる混合行列である。

$$\widetilde{M} = e\,\overline{M} + (\,1 - e\,)\,M \tag{14}$$

ＳａｋａｗａとＳｈｉｎｄｏは、繰返し計算初期の段階におけるアルゴリズムの安定性を得るためにハミルトニアン H を次のように変形する方法を提案している。

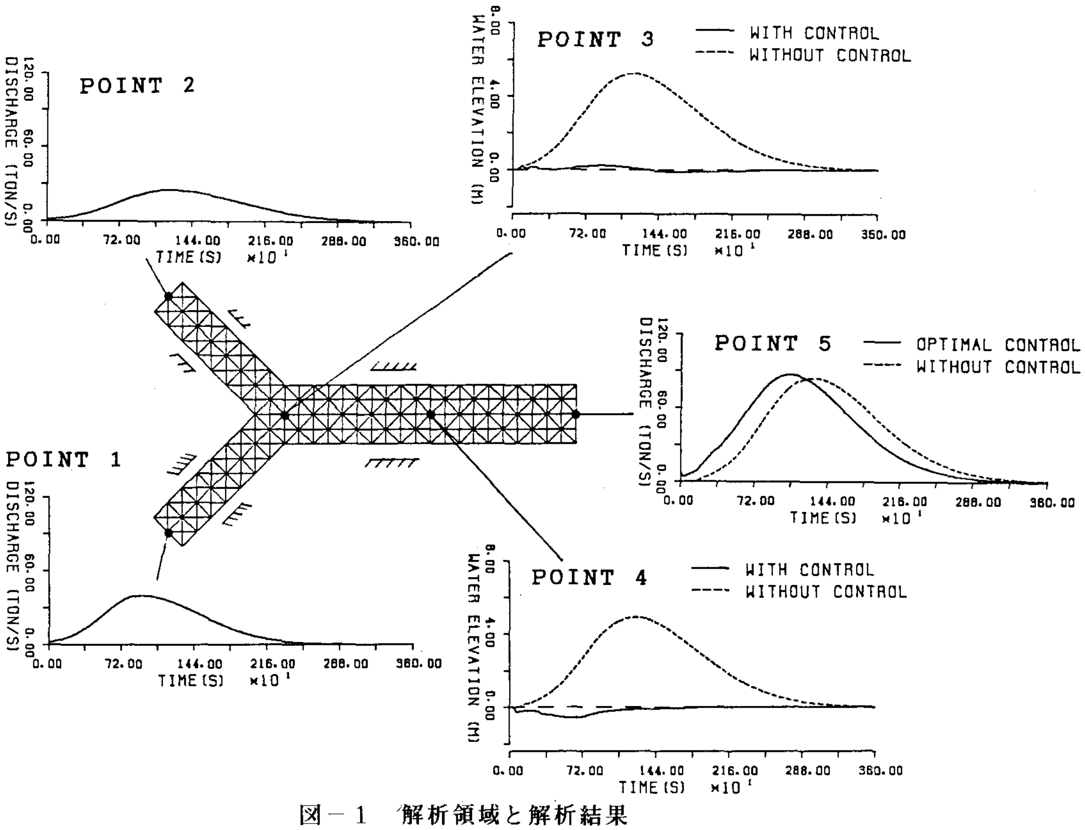
$$K_i = H_i + (u_i - u_{i-1})^{T}\,C_i\,(u_i - u_{i-1}) \tag{15}$$

ここで、C は、非負の定数を対角要素とする対角行列である。u について拘束条件が無いものとし、これを用いて最適条件を求めると、操作量 u は、次式となる。

$$u_i = -\,[R + 2\,C_i]^{-1}\,(B^{T}\,p_{i-1} - 2\,C_i\,u_{i-1}) \tag{16}$$

（１６）式より最適操作量の予想値を修正し繰返し計算により解を得ることが出来る。

５．数値解析例　数値解析例として図－１に示すような解析領域にPOINT 1 , 2 から洪水が流入する場合についての解析を行なった。ここで水深 ｈ＝３０(m) , ランピングパラメータ ｅ＝０．９, 微小時間増分量 △ｔ＝０．６(sec.)である。図示のように、制御地点(POINT 5) で実線のような流量を放流することにより、水位観測地点(POINT 3, 4)でほぼ水位変動量を制御する事が出来た。



図－１　解析領域と解析結果

６．おわりに　今回は、制御放流量に制限を設けていなかったので水位変動量をほとんど制御することができたが、実際、放流量には制限があるのでこれからは、制御放流量に制限がある場合についての解析を行ないたい。