

II-258

 プシネスク近似を用いない $k-\varepsilon$ モデルの
提案とその適用性

(財) 電中研 牛島 省、田中伸和 (株) 電力計算センター 宇田川有子、田口富貴子

1. はじめに 液体金属ナトリウムを冷却材とする高速増殖炉では、原子炉停止時に炉内に生ずる温度成層界面近傍の相対密度差が約6%（温度差約200℃）近くになる可能性がある。また、上部プレナム内の冷却材の質量が保存される場合には、冷却材の収縮による液面低下も無視できないものとなる。このため、本報ではプシネスク近似を用いない $k-\varepsilon$ モデルの基礎方程式系を導き、その適用性について検討した。

2. 基礎式 流体の密度 ρ は、本研究では温度 Θ の線形な関数であると仮定する。すなわち、 $\rho = \rho_s \{1 - \beta(\Theta - \Theta_s)\}$ 。ここで、 β は熱膨張係数、 ρ_s は基準温度 Θ_s における密度である。この関数を連続式、運動方程式およびエネルギー式に代入し、諸変数を平均成分と変動成分とに分け ($\Theta = \bar{\Theta} + \theta$, $U_i = \bar{U}_i + u_i$, $p = \bar{p} + p'$; U_i は流速の i 成分、 p は圧力)、各方程式系に平均操作を行うと次式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} - \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \theta} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D \bar{U}_i}{D t} = F_i - \frac{1}{\gamma \rho_s} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \frac{\beta}{\gamma} Q_i \quad (2)$$

$$\frac{D \bar{\Theta}}{D t} = \frac{\alpha_s}{\gamma} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} + \frac{\beta}{\gamma} R \quad (3)$$

ここで、 $\gamma = \{1 - \beta(\bar{\Theta} - \Theta_s)\}$ 、 α_s および ν_s は基準温度 Θ_s における動粘性係数と熱拡散係数、 F_i は外力の i 成分であり、また上式中の Q_i および R は次のような乱流量である。

$$Q_i = \overline{\theta \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \bar{U}_j \overline{\theta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_j \theta \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}} + \overline{u_j \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}, \quad R = \overline{\theta \frac{\partial \theta}{\partial t}} + \bar{U}_j \overline{\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} + \overline{u_j \theta \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j}} + \overline{u_j \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \quad (4)$$

方程式系をクローズするためには、これらに対するモデル化が必要となるが、高速増殖炉への適用を考えた場合、温度差が500℃程度に達したとしても β/γ は 10^{-4} 程度の値なので、他の項との比較から Q_i および R を含んだ項は無視し得ると考えられる。一方、流速の変動成分に関する連続式は、 $\beta \theta \ll \gamma$ を考慮して次のように導かれる。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\beta}{\gamma} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{U}_j \theta) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\Theta} + \theta) - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \theta} \right\} \equiv \frac{\beta}{\gamma} S' \quad (5)$$

上式より、

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j - \frac{\beta}{\gamma} u_i S' \quad (6)$$

となるが、 β/γ の値から、右辺第2項が第1項と比較して無視できると考えると、以下の関係式が得られる。

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cong \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j, \quad u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \cong \frac{\partial}{\partial x_j} u_j \theta \quad (7)$$

また k および ε に関する方程式は、 $\partial \gamma / \partial x_i \cong 0$ を仮定すれば、上式を用いて次のように導かれる。

$$\frac{D k}{D t} = \frac{\beta}{\gamma} \overline{u_i Q_i} - \frac{\beta}{\gamma} \overline{u_i \theta F_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\gamma \rho_s} \overline{u_j p'} + \frac{1}{2} \overline{u_j u_i u_i} - \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\gamma} \varepsilon \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{D \varepsilon}{D t} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\nu_s u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{2 \nu_s}{\gamma \rho_s} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} + \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - 2 \nu_s u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_k} \\ & - 2 \nu_s \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - 2 \nu_s \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ & - \frac{2}{\gamma} \left(\nu_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 - \frac{2 \nu_s \beta}{\gamma} F_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (9)$$

これらの方程式中で、1部の項は従来のモデル化を参考にすれば次のように表される。

$$\frac{1}{\gamma \rho_s} \overline{u_j p'} + \frac{1}{2} \overline{u_j u_i u_i} = -c_k(\gamma) \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (10)$$

$$-\nu_s u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{2 \nu_s}{\gamma \rho_s} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} = c_\varepsilon(\gamma) \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \quad (11)$$

$$-2 \nu_s \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{\gamma} \left(\nu_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 = -c_{\varepsilon 1}(\gamma) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2}(\gamma) \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (12)$$

ここで、 $c_k(\gamma)$ 、 $c_\varepsilon(\gamma)$ 、 $c_{\varepsilon_1}(\gamma)$ および $c_{\varepsilon_2}(\gamma)$ は定数あるいは γ の関数である。 β/γ の値を考慮して(8)式右辺第1項を無視し、小スケールの乱れの等方性を仮定して(9)式右辺第3項および第6項を消去し、さらにオーダー比較より右辺第2項を消去すると、以下の方程式が得られる。

$$\frac{Dk}{Dt} = -\frac{\beta}{\gamma} u_i \theta F_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ c_k(\gamma) \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \frac{1}{\gamma} \varepsilon \quad (13)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ c_\varepsilon(\gamma) \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} - c_{\varepsilon_1}(\gamma) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - c_{\varepsilon_2}(\gamma) \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (14)$$

これらの方程式中のレイノルズ応力と乱流熱フラックスは次式で与えられる。

$$-\overline{u_i u_j} = \varepsilon_M \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k, \quad -\overline{u_i \theta} = \varepsilon_H \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i} \quad (15)$$

また、高速増殖炉への適用を図る場合には、上式中の乱流拡散係数 ε_M 、 ε_H は、水あるいは液体金属ナトリウムを用いた成層流実験の結果等^{1)~3)}を考慮して、Launder⁴⁾による成層度の強弱を示すパラメータ $B = \beta g (k/\varepsilon)^2 \partial \overline{\Theta} / \partial z$ を用いて次のように表されるものとする。

$$\varepsilon_M / (c_\nu k^2 / \varepsilon) = 1 / (1 + 0.2B), \quad \varepsilon_H = \varepsilon_M / \text{Pr}t = 0.7 \varepsilon_M / (1 + 0.2B) \quad (16)$$

3. 解析モデルの適用 図1に示したような原子炉上部プレナム部分を模擬する円筒容器内の温度成層化現象に本報で導いた解析モデルを適用した。容器内の流体は液体金属ナトリウムであり、その物性値は $\Theta_s = 500(^{\circ}\text{C})$ で、 ν_s 、 α_s および β がそれぞれ約 $0.62(\text{cm}^2/\text{s})$ 、 $3.0 \times 10^{-3}(\text{cm}^2/\text{s})$ および $2.9 \times 10^{-4}(1/^{\circ}\text{C})$ である。INLET部分から容器内に入流する流体の温度は、定常状態では一定の高温 $T_1(500^{\circ}\text{C})$ に保たれる。一方、これに続く熱過渡状態では、流入流体の温度は、熱過渡開始($t=0$)後 $t=250$ (秒)までに T_1 から $T_2(300^{\circ}\text{C})$ へと線形に低下し、 $t=250$ (秒)以降は一定値 T_2 となる。また全熱過渡時間を通じて容器内に存在する流体および流入・流出流体の質量は一定に保たれるものとした。このため、流体の収縮により自由液面が低下する。

数値解析手法は既報³⁾のものと同様であるが、特に圧力のポアソン方程式の解法には収束性の良い前処理付きの双対共役勾配法⁵⁾を用い、また自由液面の解析にはSMAC法⁶⁾に若干の改良を加えた方法を用いた。

図2に数値解析で得られた流速ベクトルと等温線の分布を示した。流速ベクトルは定常時流入流速 0.28m/s で無次元化され、また温度は T_1 と T_2 を用いて正規化されている（等温線の間隔は 0.1 ）。図3は、ブシネスク近似を用いた既往の解析モデル(MODEL-A)と本報の解析モデル(MODEL-B)による $r=3.75(\text{m})$ における鉛直方向の温度分布の計算結果を示すものである。MODEL-Aを用いた計算では、全熱過渡時間を通じて液位は一定で、流入・流出流体の体積が一定という条件が用いられている。液位低下とブシネスク近似の有無により、温度成層化が進むにつれて、両モデルによる計算結果の差異が増加してくる。なお、解析モデルの係数は、各モデルで表1に示したものをを用いた。

《参考文献》1)Ushijima,S.etc.,4th Int. Conf. on Liquid Metal Engineering and Technology,1988. 2)Iritani,Y.etc.,Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements,1988. 3)Ushijima,S.etc.,Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements,1988. 4)Launder,B.E.,J.Fluid Mech.,vol.67,1975. 5)日本物理学会編,スーパーコンピュータ,培風館 6)Amsden,A.A.etc.,Los Alamos Sci.Lab.,Rep.No.LA-4370,1970.

表1 係数値

	$c_k(\gamma)$	$c_\varepsilon(\gamma)$	$c_{\varepsilon_1}(\gamma)$	$c_{\varepsilon_2}(\gamma)$	c_ν
MODEL-A	0.09	0.075	1.44	1.90	0.09
MODEL-B	$0.09/\gamma$	$0.075/\gamma$	$1.44/\gamma$	$1.90/\gamma$	0.09

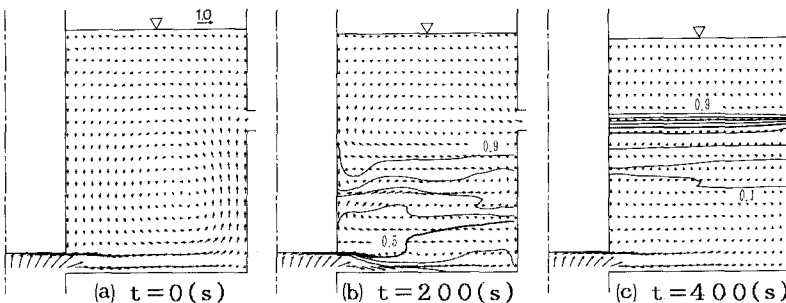


図2 温度成層化現象の数値解析結果

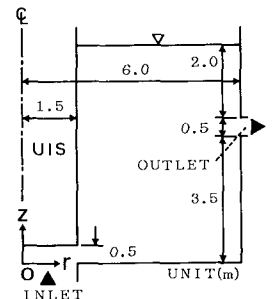


図1 円筒容器の形状

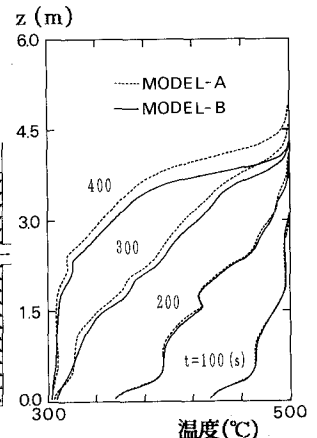


図3 温度分布