II-252　重み付差分法による地下塩水くさび浸透流の流向流速解析

九州産業大学　正員　加納正道
九州産業大学　正員　赤坂順三
東　和　大学○正員　空閑幸雄

1．まえがき　筆者らは前報等において、不圧及び被圧滞水層内における塩水くさび侵入問題解析のため、浸透流方程式（３）や移流拡散方程式（４）の重み付差分法の定め方を示した。さらに、これを用いて図１に示す解析領域と境界条件のもとで、定常状態の等濃度線を模型実験と比較して、かなりよい精度を得たことを報告した。[1),2)] 本報では、今回塩水くさびの挙動を知るために、浸透流速を精度よく求めるための重み付差分法を提案し、これを用いた定常状態の浸透流解析結果と塩水くさび濃度分布とを検討する。

2．基礎方程式　被圧滞水層内の塩水の侵入と拡散は、重み付差分法を構成する近接差分格子間では式（1）～（6）で記述することができる。

Ｄａｒｃｙの方程式　$u_1 = -k_1 \dfrac{\partial H}{\partial x}$　（１），　$u_2 = -k_2 \left(\dfrac{\partial H}{\partial y} + \dfrac{\rho}{\rho_f} \right)$　（２）

浸透流方程式　：　$$k_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\rho}{\rho_f} \right) = 0 \qquad (3)$$

移流拡散方程式　：$$\frac{\partial c}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - u_1 \frac{\partial c}{\partial x} - u_2 \frac{\partial c}{\partial x} \qquad (4)$$

ここに、u_1, u_2：x, y方向の Darcy流速、k_1, k_2：透水係数、H：圧力水頭、ρ_f：淡水の密度、ρ_s：塩水の密度、ρ：流体の密度、c：塩分濃度、d_1, d_2：拡散係数であり、ここでは次のように表示される。

$$d_1 = (\alpha_L u_1^2 + \alpha_T u_2^2) / V + d_M, \quad d_2 = (\alpha_T u_1^2 + \alpha_L u_2^2) / V + d_M \qquad (5)$$

ここに、$V = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}$、$\alpha_L, \alpha_T$：それぞれ$x$，$y$方向の分散長、$d_M$：分子拡散係数。

次に、密度ρと濃度cとの関係は、次式（６）で表わされる。　$\rho = \rho_f + (\rho_s - \rho_f) \cdot c$　（６）

3．浸透流速の重み付差分法の定め方

浸透流方程式と移流拡散方程式の重み付差分法の定め方については、前報等[1),2)] の方法による。ここでは、浸透流速を与えるダルシー式（１）､（２）の重み付差分法について述べよう。まず、x方向の浸透流速式（１）の重み付差分法の考え方を以下に説明する。いま、求めようとする浸透流速u_1を浸透流方程式より求めた圧力水頭Hを用いて表わす。即ち、考える点◉（x_0）の流速値は、その近接点①・・⑪（x_1・・x_n）に重みP_1・・P_nを付けて加算した値と考えて、式（７）あるいは、式（８）と表わすことができる。次に、y方向の浸透流速式（２）は、右辺第２項（$\beta = -k_2 \rho / \rho_f$）が$H$とは独立に求められる非同次項であることから、式（９）と表わされる。次に、式（９）において、右辺の非同次項βを０とおくと、x方向の浸透流速式（１）と全く同じ式形となることを考慮して、式（７）でxとyとを読みかえ、非同次項βを付け加えた式（１０）でy方向流速の重み付差分法を表わすことにする。

$$u_1(x_0) = P_1 H(x_1) + P_2 H(x_2) + \cdots\cdots + P_n H(x_n) \qquad (7)$$

$$u_1(0) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot H(i) \qquad (8)$$

$$u_2 = -k_2 \frac{\partial H}{\partial y} + \beta \qquad (9)$$

$$u_2(0) = \sum_{j=1}^{n} P_j \cdot H(j) + \sum_{L=1}^{m} Q_L \cdot \beta(L) \qquad (10)$$

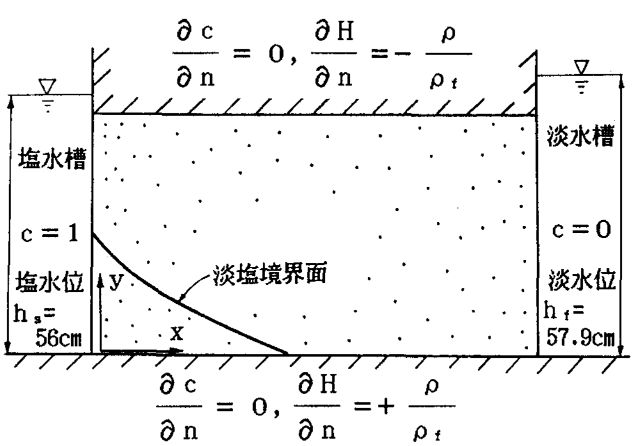
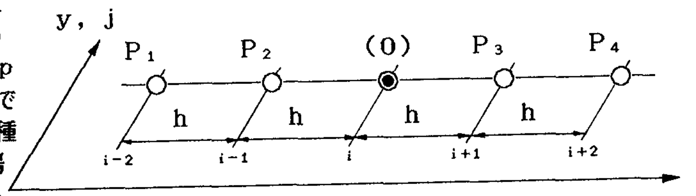


図１　塩水くさび解析領域および境界条件

重み付差分式（8），（10）を具体的に求める方法は以下のようである。いま、右辺Hをxの多項式（r=1,2・・）で置き換えて得られる式（1）の特殊解の一つを$u_1^{(r)}$とすれば、式（1）を満足する$H^{(r)}$と$u_1^{(r)}$を組み合わせた式（11）を得る。ここで、xの増分を$\Delta x=\gamma h$として、原点のごく近くを考え、$x=p\cdot\gamma h$と離散化をほどこす。ここに、pは 0,±1,±2 のような大きくない整数である。いま、図2のP_iで示すような4種類5点の近接点で差分モデルを考える場合に、重み付差分式は式（12）のように示される。そこで、原点を考える点に移し、式（11）において r=1,2,3,4のときのHとu_1の値を式（12）に代入すれば、重みP_1・・・P_4を求める連立方程式（13）が求まる。次に、非同次形の重み付差分式（10）においては、$\beta=0$とおくと式（8）と同様の方法でy方向の重みP_jが求まる。また、βの重みについては、ここではk_2を一定としているのでβの分布は{β=(1+0.025・c)}より濃度cの分布と同様となることを考慮して点0と両隣接点の3点間に二次分布を想定してシンプソンの1/3 則を適用するかあるいは、簡単のため考える点◉のみにβを与えている（$Q_L=Q_0=1$を得る）。

$$\left\{\begin{aligned} u_1^{(r)} &= -\frac{x^{(r-1)}}{(r-1)!}\cdot k_1 \\ H^{(r)} &= \frac{x^r}{r!} \end{aligned}\right. \qquad (11)$$



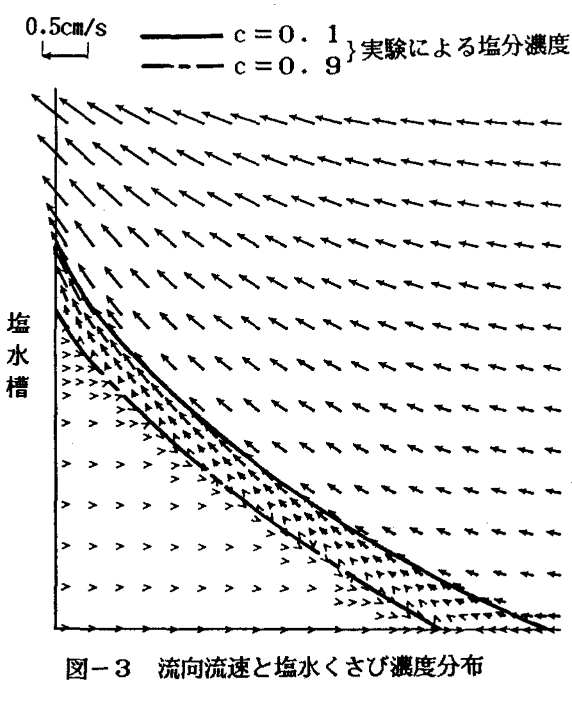
◉：求める点（u_1），○：Hの差分点（既知）

図2　x方向の浸透流速差分モデル

$$u_1(i)=P_1H(i-2)+P_2H(i-1)+P_3H(i+1)+P_4H(i+2) \qquad (12)$$

$$\begin{bmatrix} -2h & -h & h & 2h \\ 4h^2 & h^2 & h^2 & 4h^2 \\ -8h^3 & -h^3 & h^3 & 8h^3 \\ 16h^4 & h^4 & h^4 & 16h^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

4．解析結果及び考察　図3は、本報で述べた重み付差分法により求めた流速ベクトルを示したものである。同図によれば、右端より左方へ向う淡水の流れは、塩水くさび先端付近まではほぼ水平に流れているが、塩水くさび先端部に近づくにつれ、くさびに沿って上向きに流向を変えている。また、左方より右方に向う塩水の流れは、非常に小さい流速で、ほぼ水平方向に流れ、塩分濃度が急変している領域である濃度９０%から１０%において、流向が反転し流速が大きくなっている様子が観察できる。これら淡水および塩水の流向と流速の変化の様子は実験で得られた塩水くさびの形状と位置をよく説明しており、従って、本重み付差分法による浸透流解析結果は妥当であろうと考えている。



図－3　流向流速と塩水くさび濃度分布

参考文献

１）加納・空閑・赤坂：重み付差分法による塩水くさびの拡散解析　第４２回年講第２部
２）加納・赤坂・空閑：重み付差分法による地下塩水くさび浸透流解析　昭和６３年西部支部年講