

II-245 開水路網不定流の行列解法について

広島大学大学院 学生員 台信 達観  
 広島大学工学部 正 員 常松 芳昭  
 広島大学工学部 正 員 金本 満

1. はじめに： 開水路網不定流の解析法の一つに、非線形な偏微分方程式系のNewton-Raphson法による反復解法がある。しかし、このような方法では複雑な開水路網に対してシステムモデルを系統的に定式化することが容易でなく、また行列が巨大化するなどの数値計算上の不利がある。そこで、本報告では開水路網の不定流の系統的な行列解法の展開を行い、これを広島市内の河川網における洪水流のシミュレーションに適用した結果についてのべる。

2. 開水路網のシステムモデルの行列表示：一般に広幅水路における漸変非定常流の基礎式は分布型モデルの偏微分方程式で表わされる。その特性方程式の線形近似化式をガラーキン法によって離散化し差分方程式系が得られる。<sup>1)</sup> ここではこれを基礎として、システムモデルの行列表示を行う。いま、開水路網は単一水路が連結したものと考えられるので、図-1のように単一水路が有向グラフの構造の中に反映されるよう節点定義量と枝定義量を定める。

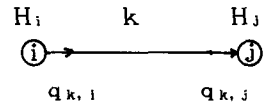


図-1 単一水路の有向グラフ

$H_i, H_j$ は枝 $k$ の始点と終点における水位、 $q_{k,i}$ は枝 $k$ に隣接する節点 $i$ での流量を表わす。このような節点定義量と枝定義量を用いると任意の枝 $k$ に対して成立すべき流れの基礎方程式は、単一水路に対するそれが適用され、<sup>2)</sup> 次の形式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} A_1 - A_2 A^{-1} A_4 & -A_2 A^{-1} A_5 \\ -A_7 A^{-1} A_4 & A_8 - A_7 A^{-1} A_5 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} H_i \\ q_{k,i} \\ H_j \\ q_{k,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 - A_2 A^{-1} B \\ B_m - A_7 A^{-1} B \end{bmatrix}_k \quad (1)$$

ここに $A, A_1, \dots, A_8$ は単一水路に対する差分方程式系の係数行列の部分行列、 $B_1, B, B_m$ は定数項ベクトルの部分列ベクトルである。さて開水路網のグラフは一般に $n$ 個の節点、 $e$ 本の枝から成るとする。また、ソースとシンクの数 $s_1, s_2$ とする。

開水路網に対しては、通常、 $2e$ 本の枝における運動方程式と $(n - s_1 - s_2)$ 個の中間節点での流量連続式、 $(s_1 + s_2)$ 個のソースおよびシンクでの境界条件式から成る $n$ 個の条件式とが書かれる。これらの式をまとめて系統的な行列方程式とするために節点の番号付けは次のように行う。すなわち節点番号は順にソースに $1 \sim s_1$ 、中間節点に $s_1 + 1 \sim n - s_2$ 、シンクに $n - s_2 + 1 \sim n$ を付与する。さらに、以下のような行列とベクトルを定義する。

$H_+, H_0$ ：節点水位ベクトル $H$ をソース、中間節点、シンクに対応したものに分けた時のそれぞれソース、中間節点に対応する部分列ベクトル、 $\vec{q}^+$ ：枝の始点である節点からの流出流量ベクトル、 $\vec{q}^-$ ：枝の終点である節点への流入流量ベクトル、 $K_+, K_0, K_-$ ：枝における運動方程式のなかの節点水位ベクトル $H$ の係数行列をソース、中間節点、シンクに対応して分割した部分行列、 $\vec{P}_3, \vec{P}_4$ ：ネットワークを構成する $2e$ 本の枝についての連立方程式の $2e$ 行 $(n + 2e)$ 列の係数行列の部分行列、 $\vec{D}_+, \vec{D}_0$ ：入連結行列をソース、中間節点に対応して分割した部分行列、 $\vec{D}_0$ ：入連結行列のシンクに対応する部分行列、 $G$ ：枝に関する定数項ベクトル、 $F, f$ ：それぞれソース、シンクに対する時間 $t$ の既知関数を成分とするベクトル。このような記号を用いると式(1)の変数は、 $H_i \rightarrow \vec{H}_k, H_j \rightarrow \vec{H}_k, q_{k,i} \rightarrow \vec{q}_k^+, q_{k,j} \rightarrow \vec{q}_k^-$ になるから、枝方程式と節点方程式は式(2)のように行列表示される。節点水位と節点流量は式(2)を解いて求められる。

$$\begin{bmatrix} H_+ \\ H_0 \\ \bar{q} \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_+ & K_0 & \bar{P}_3 & \bar{P}_4 \\ 0 & 0 & \bar{D}_+ & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_0 & -\bar{D}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G-K_- \cdot f \\ F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

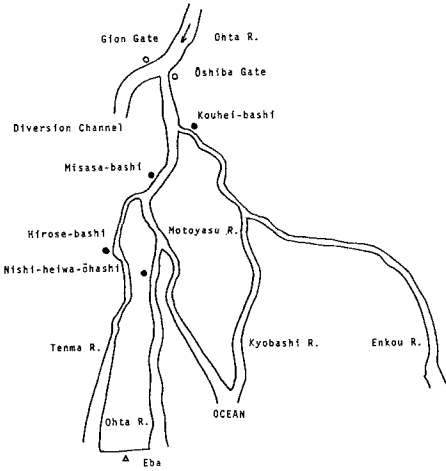


図-2 広島市内の河川網

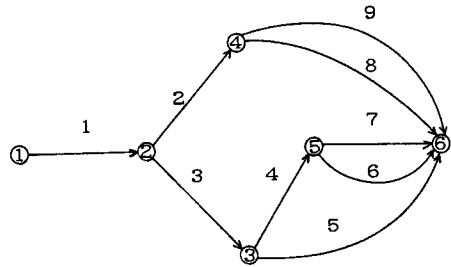


図-3 システム・グラフ

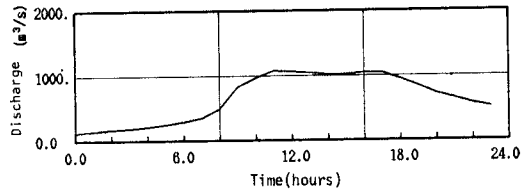


図-4 流量ハイドログラフ(上流端境界条件)

3. 計算例: 図-2は太田川放水路を除いた大芝水門から下流の広島市内の河川網の模式図である。図-3はそのシステム・グラフである。計算に用いた節点1のソースでの境界流量は図-4、節点6のシンクでの境界水位は図-5の江波の実績潮位である。これらはいずれも昭和55年8月31日の洪水に関するものである。 $\Delta t = 30$ 秒を用いて計算した結果を工兵橋における水位ハイドログラフで示すと図-6のようである。これより洪水時での広島市内の河川網における水位変動は潮汐の影響を受けて複雑であるが、かなり良くシミュレートされていることが分る。

4. おわりに: 以上、開水路網における漸変非定常流の数値計算のプログラミングが簡単かつ標準化されるような数値シミュレーション法を提示した。

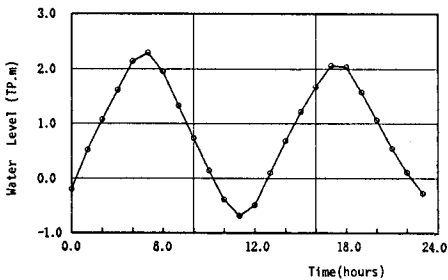


図-5 実績潮位(下流端境界条件)

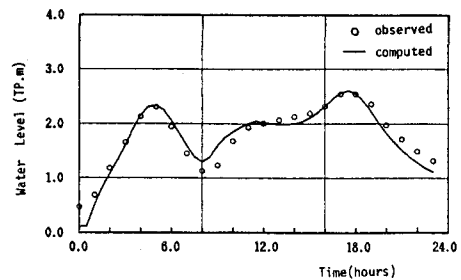


図-6 工兵橋の水位

<参考文献>

1) Gunaratnam, D. and F.E. Perkins: Numerical Solutions of Unsteady Flows in Open Channels, Tech. Rep. 127, M. I. T., 1970. 2) 常松芳昭: 開水路網の非定常流解析法について、土木学会第43回年講。