

II-225

吹送流による安定成層の連行則の理論的導出

東京工業大学 工学部 正 員 田中昌宏

東京工業大学 工学部 正 員 石川忠晴

1. はじめに

最近の研究によると、吹送流による安定成層の連行則は、領域が無限に広い場合には、 $Riu = \text{一定}$ 、 $Es \sim Ri s^{-1/2}$ が一般に支持されている¹⁾。ここに、 $Riu = \varepsilon g h / \Delta U^2$ 、 $Es = We / Us$ 、 $Ris = \varepsilon g h / Us^2$ 、 ε ：相対密度差、 h ：混合層厚さ、 g ：重力加速度である。 $Riu = \text{一定}$ の物理的解釈は、連行が界面におけるK-H不安定による混合によっているという説明がなされる。また、 $Es \sim Ri s^{-1/2}$ は、 $Riu = \text{const.}$ とすると運動量式から導かれる。しかし、混合層内部の混合機構は説明されておらず、混合現象全体の混合機構の物理的説明は十分なされていない。

著者らは霞ヶ浦において日成層と吹送流の観測を行っており、日成層の混合現象は吹送流の内部シアが重要であることを示している²⁾。本研究ではこうした知見を基に混合層内部の混合機構に着目した理論展開を行い、連行則、さらに流速及び密度の鉛直分布を導き、現地データと比較検討する。

2. 連行則の理論的導出

無限に広い領域を考えると、運動方程式及び質量保存式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{u'w'}) \quad (1), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{\rho'w'}) \quad (2)$$

ここに、 u ：水平流速、 u' ： u の乱れ成分、 w' ：鉛直流速の乱れ成分、 ρ ：密度、 ρ' ： ρ の乱れ成分である。

二層流の界面においては、流速差によるせん断によって不安定が生じるため、上下層の流体が変位し最終的に混合が生じる(K-H不安定による混合)。せん断による不安定は乱れエネルギーの生産を意味し、混合はポテンシャルエネルギーの増加を意味する。本研究では、このような乱れエネルギーの生産とポテンシャルエネルギーの増加の局所的な釣合が、界面だけではなく混合層内全体で生じているものとする。このとき、乱れエネルギーのポテンシャルエネルギーへの変換率を C とすれば、乱れエネルギーの式は次式となる。

$$C (-\overline{u'w'}) \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_1} \overline{\rho'w'} \quad (3)$$

図1は現地観測で得られた流速、密度分布の概念図である。水面ごく近傍の領域は乱流境界層の壁法則が成り立つものとし、それより下では流速及び密度分布は次のような相似形を保っているものと仮定する。

$$u = \Delta U f(\eta), \quad \Delta \rho / \rho = \varepsilon = \varepsilon_s G(\eta), \quad \eta = z/h \quad (4)$$

ここに、 ΔU ：上下層の相対流速差、 ε_s ：相対密度差である。 $\delta_s \ll h$ とし、(1) - (3)式を z に関し0(δ_s)→ h まで積分すると、

$$\beta \frac{d}{dt} (\Delta U h) = U_s^2, \quad (\beta = \int_0^1 f d\eta) \quad (5), \quad \gamma \frac{d}{dt} (\varepsilon_s g h) = 0, \quad (\gamma = \int_0^1 G d\eta) \quad (6)$$

$$C \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) U_s^2 \Delta U + \frac{\alpha}{2} \Delta U^2 \frac{dh}{dt} = \xi \varepsilon_s g h \frac{dh}{dt} \quad (7)$$

$$(\alpha = \int_0^1 f^2 d\eta, \quad \xi = \int_0^1 G \eta \cdot \frac{1}{\beta} d\eta)$$

となる。(7)を変形すると、

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2C \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) U_s^2 \Delta U}{(2\xi - C\alpha \frac{\Delta U^2}{\varepsilon_s g h})} \quad (8)$$

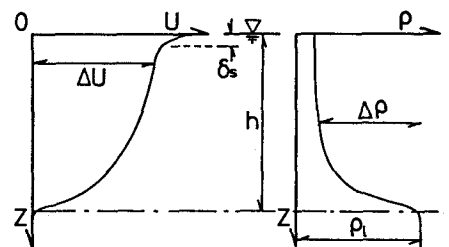


図1 流速及び密度分布の概念図

となる。(8)式が、連行速度を規定する式、すなわち連行則である。

さらに(8)式において分母の R_{iu} =一定とすると、(5),(8)式は解析的に説くことができ、 $t \gg 0$ では、

$$h \sim t, \Delta U = \text{一定} \quad (9)$$

の関係が得られる(以下、この状態を定常連行と呼ぶ)。(9)式の成り立つ状態では運動方程式(5)式は

$$\beta \Delta U \frac{dh}{dt} = U_s^2 \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{U_s^2}{\Delta U} \quad (10)$$

となり、これを(8)式に代入すると次式を得る。

$$R_{iu} = \frac{\varepsilon_s g h}{\Delta U^2} = \frac{C}{\xi} \left(\beta - \frac{\alpha}{2} \right) = \text{const.} \quad (11)$$

また、(8)式を変形すると、

$$We/U_s = A R_{iu}^{-1/2} R_{is}^{-1/2} \quad (12)$$

となる。(11),(12)式は従来の研究から得られた連行則であり、(8)式で示される本連行則と運動方程式の結果として導かれた。したがって、(8)式が連行の本質的關係であるといえる。

次に流速及び密度分布を理論的に導く。定常連行の状態では(3)式は次のように書ける。

$$\left[\left\{ 1 + \frac{1}{\beta} (\eta f - F) \right\} f' \right] = - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{R_{iu}}{C} \eta G, \quad (F = \int f d\eta) \quad (13)$$

さらに、レイノルズ応力及び密度フラックスが勾配拡散型で表現できるとすると、(3)式より次式を得る。

$$(f')^2 = - \frac{R_{iu}}{C R_{if}} G' \quad (14)$$

ここに $R_{if} = K_m / K_\rho$ (K_m , K_ρ ; 運動量及び密度の拡散係数)であり、 $R_{if} = 1$ とすると、(13),(14)から流速及び密度分布の相似形が解析的に得られる。

$$f = 1 - \eta^2, \quad G = 1 - \eta^3 \quad (15)$$

これより、 $\beta = 2/3$, $\alpha = 8/15$, $\gamma = 3/4$, $\xi = 3/10$, $R_{iu}/C = 4/3$ となる。

3. 現地観測結果との比較

図2は、現地の様々な状況で得られた流速及び密度分布を無次元化し、理論曲線と共に示している。実測値の密度分布は理論曲線より太っており、これは K_ρ が K_m に較べ大きいためと考えられるが、流速、密度分布ともほぼ理論曲線と一致している。

図3は Eu と R_{is} の関係を示しており、実測値と理論線はほぼ一致している。ここで $C=0.5$, $R_{iu}=2/3$ とした。実測値の R_{iu} はバラツキが大きかったが、平均的に $2/3$ に一致していた。Price¹⁾は実験及び現地観測から $R_{iu} \sim 0.6$ を提唱しており、本結果と一致している。

以上から、本研究の吹送流による安定成層の混合機構の考え方が妥当であったと判断される。

参考文献

- 1) 例えばPrice, J. R.: On the scaling of stress-driven entrainment experiments, *JFM*, 90, 509-529, 1979.
- 2) 田中・石川: 日成層形成時の吹送流の特性について, 土木学会論文集, 405/II-11, 印刷中, 1989.

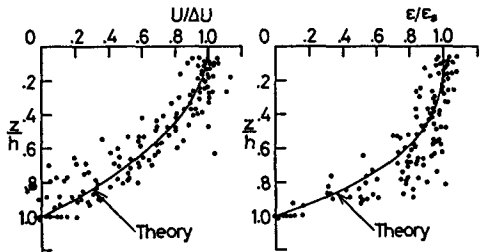


図2 流速及び密度の相似分布

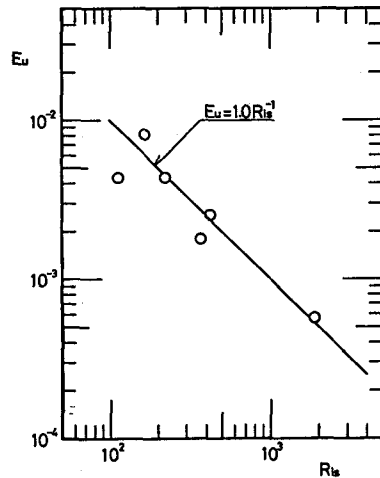


図3 Eu と R_{is} の関係