

ゆるやかな境界形状をもつ  
層流に関する解析的研究

北海道大学工学部 正員 山田 正  
北海道大学工学部 学生員 大前 智敬

1. はじめに

河床波上の流れにおいては壁面せん断応力と液面との間に位相差が生じることが知られている。このことは河床波の発生を考えるうえで重要であり、Kennedy(1)、林(2)らの研究によつてはじめて明らかにされた。その後著者ら(3,4)も河床波の発生に及ぼすせん断応力の分布に関して実験的、理論的研究を進めており、小規模河床波の発達を記述する方程式を導いている。ところで、上記の位相差を解析的に導いたものとして Benjamin(5)、日野・宮永(6)らの研究があり、数値計算により層流の場合を計算したものとして J. S. Lee・Y. C. Fung(7)らの研究がある。本研究は松信(8)の示した解析方法に準じ、上記の位相差に関し層流中における河床波上の流れをより精度よく解析的に明かにすることを目的とし、また、従来行われていなかった波高と位相差の関係について議論する。本研究では数式処理言語である REDUCE を用い、高次摂動解を何らの省略も行うことなくコンピュータ上で求めている。

2. 基礎式および計算手法

図1のようなx軸に関して対称なゆるやかな波状境界面をもつ流れを考える。壁面は、 $y=Hh(kx)$ で与え、流れは2次元定常流とし、non-slipの条件を考慮する。ここで、 $H$ : 流路の半幅、 $L$ : 境界断面の波長、 $k$ : 断面が非一様である領域の特性的長さの逆数( $k=1/L$ )、 $h(kx)$ : 境界断面の形状を与える関数( $x$ について任意回微分可能)、 $\kappa$ : 断面の空間的变化のゆるやかさを表す無次元パラメータ( $\kappa=kH/H/L$ )、 $a$ : 波高、 $\epsilon$ : 波高間の距離とする。空間座標( $x, y$ )の無次元化を行う。 $x$ 方向、 $y$ 方向はそれぞれ

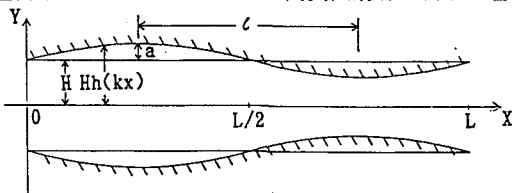


図1 境界断面形状

$$\xi = kx = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{Hh(kx)} = \frac{y}{Hh(\xi)} \quad (1)$$

となり、流れの領域は、 $-1 \leq \eta \leq 1$ で表される真つすぐな平行断面内部に写像される。次に流れの諸量を直交関数である超球多項式(またはGegenbauer多項式) $C_n^\alpha(\eta)$ を用いて展開する。流れ関数 $\psi$ の展開は、

$$\psi = -\frac{1}{3}HU \sum_{n=1}^{\infty} h(\xi) A_{2n}(\xi) C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \quad (2)$$

となる。ここで、 $U$ : 代表流速、 $A_{2n}(\xi)$ :  $\psi$ に関する展開式である。(2)式を基にして、流れの各諸量の展開式を求め、渦度方程式に代入すると解くべき基礎式を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_{2n-1}(\xi) C_{2n-1}^{5/2}(\eta) = \frac{1}{3} \kappa \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}(\xi) C_{2n-1}^{1/2}(\eta) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}(\xi) C_{2n}^{-1/2}(\eta) \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{3h(\xi)} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} (h(\xi) A_{2n}(\xi))' C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}(\xi) C_{2n-2}^{3/2}(\eta) \right\} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $\text{Re}$ : レイノルズ数、 $\Omega_{2n}(\xi)$ :  $\omega$ に関する展開式、 $N_{2n-1}(\xi)$ :  $\nabla^2 \omega$ に関する展開式である。(3)式はパラメータとして $\kappa \text{Re}$ (以後、 $\epsilon = \kappa \text{Re}$ とする)

の形だけが現れている。また、 $\Omega, N$ の形より全ての未知数は $\kappa^2$ のべき級数に展開されることがわかる。計算を行うにあたってはREDUCEによる数式処理を用い、何らの省略を行うことなく、 $\epsilon^2, \kappa^2$ の項まで求めた。

3. 解析結果および考察

本節では2.で求めた解を基にして壁面せん断応力を求めてみた。境界断面形状はSIN形を用いた。図2は壁面せん断応力分布図、図3は流線図の1例である。これらの図より以下のことがわかる。(1)壁面せん断応力の最大値は境界断面crestの上流側にある。位相差 $\phi$ の河床形状に対する上流側への進みがうかがえる。(2) $\kappa$ の値が小さくな

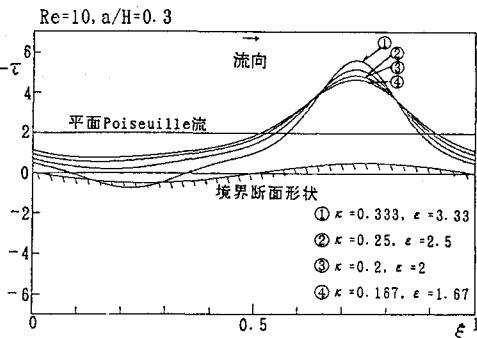


図2 壁面せん断応力分布図

るにつれ壁面せん断応力の分布は平たくなり最大値は小さくなる。(3)波高が小さい程、壁面せん断応力も小さい。また、流線図より境界断面crestの上流側で流れが強くなっているのを見ることが出来る。このことが壁面せん断応力の上流側での増大をうんでいる。図4(a),(b)に位相差 $\phi$ と波形パラメータ $\kappa$ との関係を示す。これらの図より以下のことがわかる。(1)壁面せん断応力と波面との間に位相差 $\phi$ が生じており、その値は常に正である。このことより、位相差 $\phi$ が上流側に進むことがわかる。(2)位相差 $\phi$ はある $\kappa$ の値に対して極大値をとる。その値は $Re$ が大きい程大きくなり、ピークも顕著に現れる。(3)波高が小さい程位相差 $\phi$ が大きい。波高をさらに小さくしていくと位相差 $\phi$ は大きくなるが位相差 $\phi$ 間の差は小さくなっていき、一定の値に収束する。(4)剥離が生じたとき、その領域が大きくなるにつれ位相差 $\phi$ も大きくなる傾向がみられる。その傾向は $Re$ が大きい程はつきりする。(5)波高が大きい程小さい $\kappa$ の値において剥離が生じる。

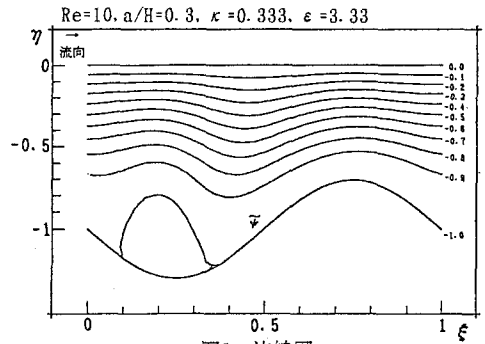
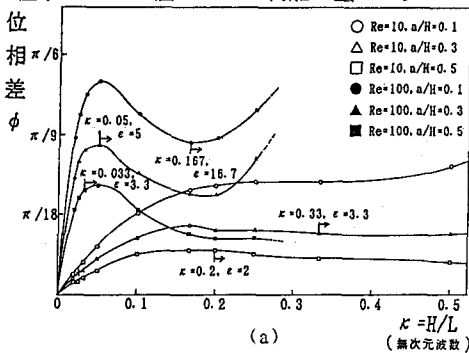
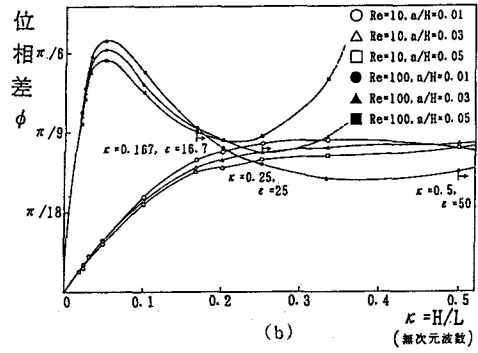


図3 流線図

大きくなるにつれ位相差 $\phi$ も大きくなる傾向がみられる。その傾向は $Re$ が大きい程はつきりする。(5)波高が大きい程小さい $\kappa$ の値において剥離が生じる。



(a) (無次元波数)



(b) (無次元波数)

図4 位相差 $\phi$ と無次元波数 $\kappa$ との関係(図中の|→は、|より→の領域で剥離が起きていることを示す。)

図5は $Re=100$ のときの位相差 $\phi$ のピーク値 $\phi_{max}$ と波高 $a/H$ の関係を示す。この図より波高が大きくなると $\phi_{max}$ が小さくなるのが確かめられる。

#### 4. 結論

本解析で得られた結果を要約すると、(1)壁面せん断応力と波面との間に位相差が生じる。位相差は、境界断面crestの上流側に進む。(2)波高が小さい程位相差が大きくなる。波高を小さくしていくと、位相差は一定の値に収束していく。(3)波高が小さい程壁面せん断応力も小さい。(4) $\kappa$ の値が小さいと、壁面せん断応力分布は

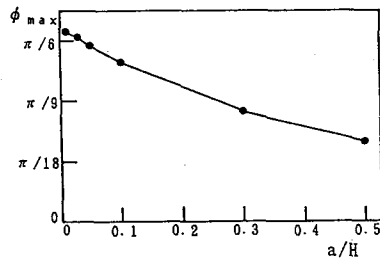


図5  $Re=100$ における位相差 $\phi$ のピーク値 $\phi_{max}$ と波高 $a/H$ の関係

平たくなる。(5)河床波を議論するにあたり、波高に対する壁面せん断応力と波面との間の位相差が重要となってくる。波高が小さいと位相差が大きく、河床波の発達を促す。波高が大きくなるにつれ位相差は小さくなり、河床波の発達をおさえるように働く。このことより定常な河床波の生成をもたらすものと考えられる。謝辞 本研究は、文部省科学研究費・重点領域研究(1)および一般研究C(代表 山田正)の補助のもとにおこなわれている。ここに記して深甚なる謝意を表す。

参考文献(1)Kennedy, J. F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channel, J. F. Mech., Vol. 16, 1963. (2)Hayashi, T.: Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE, Vol. 96, 1970. (3)山田正・池内正幸・植松正伸: 小規模河床波の発生発達に関する研究, 31回水講, 1987. (4)山田正・竹本典道: 空気流によるサンドリップルの発生発達に関する研究, 32回水講, 1988. (5)Benjamin, T. B.: Shearing flow over a wavy boundary, J. F. Mech., Vol. 6, 1950. (6)日野幹雄・宮永洋一: 波状境界をもつ二次元管路流の解析, 土木論報264, 1977. (7)Lee, J. S. and Fung, Y. C.: Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers, J. of Applied Mech. Vol. 37, 1970. (8)松信八十男: ゆるやかに断面の変化するみぞの中の粘性流体の流れ, 日吉論文集, 1977.