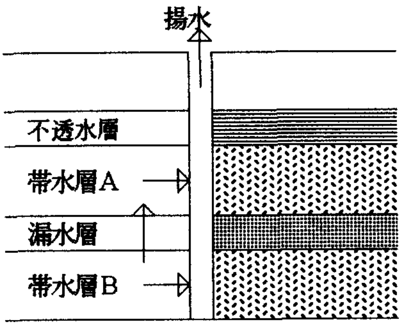
II-97　漏水層をはさむ二つの被圧帯水層からの定常揚水の理論的解析

名古屋大学大学院　学 ○ 小 林 孝 至
名古屋大学工学部　正　松 林 宇一郎
名古屋大学工学部　正　高 木 不 折

1．まえがき

地下水の管理あるいは、地中構造物の築造にあたって帯水層の水理定数を知ることは、重要である。その一つの方法として一般的に用いられる方法に揚水試験があり、その解析方法についてはThiem法（定常）、Theis法（非定常）、Jacob法（非定常，近似解）、回復法、不完全貫入の場合、不圧層からの漏水のある場合などこれからこれまで多くの研究がある。

一方、実際の帯水層においては、複数の透水層と難透水層が互層になっている場合がふつうであるが、この難透水層の透水性が比較的大きな場合には、漏水層と呼ばれその透水性が問題になっている。本研究では最も簡単な例として、2つの透水層がその間に1つの漏水層をはさむ場合の帯水層定数の決定法を定常揚水時の水頭分布の理論解から導いた。



図－1　帯水層の概念図

2．定常揚水の理論解

図－1に示す帯水層および揚水井を考える。二つの帯水層の水頭 h_A, h_B，透水量係数をT_A, T_Bとし、漏水層を横切る流れが、上下層の水頭差に比例すると仮定し、漏水係数α^2　(=k'／m')を定義すると、2つの帯水層流れの基礎式は、定常状態を対象とすると次のように表すことができる。

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(T_A h_A)\right] = \alpha^2 (h_A - h_B) \qquad (1.a)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(T_B h_B)\right] = \alpha^2 (h_B - h_A) \qquad (1.b)$$

式(1.a)と(1.b)を足し合わせると、

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(T_A h_A + T_B h_B)\right] = 0 \qquad (2)$$

この式は、$(T_A h_A + T_B h_B)$を一つの未知変数と考えれば 単一帯水層の定常の基礎式と同一であり、容易に解くことができる。境界条件としては影響半径(r=R)における水頭(H_A, H_B)と流量の連続条件(3)式より、式(2)の解は(4)式で与えられる。

$$Q = 2\pi r\frac{d}{dr}(T_A h_A + T_B h_B) \qquad (3)$$

$$T_A h_A + T_B h_B = \frac{Q}{2\pi}\ln(r/R) + T_A H_A + T_B H_B \qquad (4)$$

次に、式(1.a)から式(1.b)を辺辺差し引くと式(5)が導かれる。

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(h_A - h_B)\right] - \alpha^2\left(\frac{1}{T_A} + \frac{1}{T_B}\right)(h_A - h_B) = 0 \qquad (5)$$

この方程式は、水頭差$h_A - h_B$を変数とする0次の変形ベッセル方程式であり、その解は、次式となる。

$$h_A - h_B = C_3 I_0\left(\alpha \cdot r\sqrt{\frac{1}{T_A} + \frac{1}{T_B}}\right) + C_4 K_0\left(\alpha \cdot r\sqrt{\frac{1}{T_A} + \frac{1}{T_B}}\right) \qquad (6)$$

で与えられる。ここで、I_0は0次の第一種変形ベッセル関数、K_0は第2種変形ベッセル関数である。また、C_3,C_4は積分定数であり、適当な境界条件によって決めなければならない。

以上、帯水層定数、積分定数を未知な形で含んでいるが、解は得られた。

3．パラメータの同定法

揚水試験で上下帯水層A,Bに2本づつ観測井を設けて、定常と見なされる状態になったときの各水頭が計測されているとする。すなわち、距離$r=r_1,r_2$での両層の水頭を(h_{A1},h_{B1})、(h_{A2},h_{B2})とする。

式(4)に $r=r_1,r_2$のデータを代入すると、次の連立方程式が得られる。

$$T_A\,h_{A1}+T_B\,h_{B1}=-\frac{Q}{2\pi}\ln(r_1/R)+T_A\,H_{A1}+T_B\,H_{B1} \tag{7.a}$$

$$T_A\,h_{A2}+T_B\,h_{B2}=-\frac{Q}{2\pi}\ln(r_2/R)+T_A\,H_{A2}+T_B\,H_{B2} \tag{7.b}$$

この2式を解くと、上下2帯水層A,Bの透水量係数T_A,T_Bは次のように求められる。

$$T_A=\frac{Q}{2\pi}\left[\left(\frac{r_2}{R}\right)^{s_{B1}}/\left(\frac{r_1}{R}\right)^{s_{B2}}\right]/(s_{A1}\,s_{B2}-s_{A2}\,s_{B1}) \tag{8.a}$$

$$T_B=\frac{Q}{2\pi}\left[\left(\frac{r_2}{R}\right)^{s_{A1}}/\left(\frac{r_1}{R}\right)^{s_{A2}}\right]/(s_{B1}\,s_{A2}-s_{B2}\,s_{A1}) \tag{8.b}$$

ただし、s_A,s_Bは帯水層 A、Bの水頭低下量である。($s=H-h$)

一方(6)式はT_A,T_Bが既知となったので、未知数としてはC_3,C_4,αの3個を含む。そこで、この式に影響半径$r=R$での水頭データと揚水試験によって得られた$r=r_1,r_2$での水頭低下量のデータを各々代入してやると、次の3つの方程式が得られ、原理的にこれらの式からC_3,C_4,αが求められる。

$$s_{B1}-s_{A1}=C_3\,I_0(\alpha\cdot r_1\cdot D)+C_4\,K_0(\alpha\cdot r_1\cdot D)+H_B-H_A \tag{9.a}$$

$$s_{B2}-s_{A2}=C_3\,I_0(\alpha\cdot r_2\cdot D)+C_4\,K_0(\alpha\cdot r_2\cdot D)+H_B-H_A \tag{9.b}$$

$$s_{BR}-s_{AR}=C_3\,I_0(\alpha\cdot R\cdot D)+C_4\,K_0(\alpha\cdot R\cdot D)+H_B-H_A \tag{9.c}$$

ここで、$D=\sqrt{(1/T_A)+(1/T_B)}$

しかし、式(9)は右辺に変形ベッセル関数が入っているため非線形であり簡単には解くことができない。そこで、式(9)からC_3,C_4を消去するとαに関する方程式が得られる。この式はNewton法等を用いることによって解くことができる。

$$\begin{aligned}f(\alpha)=&\ \eta_1\,[I_0(\alpha\cdot r_2\cdot D)\cdot K_0(\alpha\cdot R\cdot D)-K_0(\alpha\cdot r_2\cdot D)\cdot I_0(\alpha\cdot R\cdot D)]\\&+\eta_2\,[I_0(\alpha\cdot R\cdot D)\cdot K_0(\alpha\cdot r_1\cdot D)-K_0(\alpha\cdot R\cdot D)\cdot I_0(\alpha\cdot r_1\cdot D)]\\&+\eta_R\,[I_0(\alpha\cdot r_1\cdot D)\cdot K_0(\alpha\cdot r_2\cdot D)-K_0(\alpha\cdot r_1\cdot D)\cdot I_0(\alpha\cdot r_2\cdot D)]=0\end{aligned} \tag{10}$$

ここで、$\eta=(h_A-h_B)$である。なお、その過程で必要となるK_0,I_0及びその微分係数は次式で計算できる。

$$I_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2n}}{(n!)^2} \tag{11.a}$$

$$K_0(x)=-\left(\gamma+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)I_0(x)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x/2)^{2n}}{(n!)^2}\left(2\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right) \tag{11.b}$$

ここでγ:オイラー定数でほぼ0.5772である。

4．あとがき

以上、本研究では、漏水層をはさむ２つの透水層の透水量係数並びに漏水係数の同定法を定式化した。しかしながらその適用に当たって入手したデータに問題があり具体的的用例を示すことができなかった。今後、模型実験・数値実験を通じて解析法の適用性を検討する予定である。