II-75　信頼性を付与した確率水文量の評価（その2）

中央復建コンサルタンツ㈱　正会員　草刈智一
信州大学工学部　正会員　寒川典昭
信州大学工学部　正会員　荒木正夫

1．はじめに

治水・利水計画の策定する際に用いられる水文データの多くは小標本であり，そこから算定される確率水文量，特に，大きなリターンピリオドに対する確率水文量は非常に不安定であることが知られている。その主な原因の1つにデータの質的・量的不十分さのために，確率分布の母数推定に十分な情報が与えられていないことがあげられる。これまで，寒川ら[1),2),3)]は推定母数の信頼性の数量的な評価を試みてきた。さらに，その実用面への応用として"情報量と信頼性を付与した確率水文量"を提案し，母集団がガンベル分布に従う場合の，尺度母数aのみを未知とした場合，及び位置母数bのみを未知とした場合について具体的な算定を行った。本稿では，それらを拡張して両方の母数を共に未知とした場合について議論する。

2．信頼性を付与した確率水文量

まず，確率分布を支配する母数を確率変数とみなし，ベイズ論的立場から得られた母数の事後確率分布のエントロピーを導出しデータのもつ情報量を算出するとともに，事後確率分布から確率論的に得られた母数を用いて"信頼性を付与した確率水文量"を算定する。なお，事前確率分布には一様分布を採用した。

1）事後確率分布のエントロピーの導出

aとbは互いに独立であり，n個の確率変数$x'(n)=(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$が互いに独立に(1)式のガンベル分布に従うものとする。いま，(a，b)の同時事前確率分布に(2)式の一様分布を仮定すると，$x'(n)=x(n)$が与えられた後の(a，b)の同時事後確率分布は(3)式を用いると(4)式で表される。ここで，Kは規準化定数である。従って，(a，b)の同時事後確率分布のエントロピーは(5)式で与えられる。

2）データのもつ情報量

データのもつ情報量は，一般に，事前の不確定さとデータが与えられた後の事後の不確定さの差で表されるものである。従って，同時事前確率分布のエントロピーが(6)式で表されることより，(5)式を用いるとデータのもつ情報量は(7)式で与えられる。

3）確率水文量の信頼性

ここでは，母数が確率水文量の算定に及ぼす影響，及びデータが与えられた後の母数の変動性を考慮した上で，(4)式で導出された事後確率分布を用いて母数を確率論的に推定することにより，そこから算定される確率水文量の信頼性を評価する。

ガンベル分布においては，大きいリターンピリオドに対する確率水文量を算定する場合，母数aは小さいほど，bは大きいほど大きい確率水文量を与えることが知られている。

そこで，事後確率分布を用いて未知である母数を推定する際，$a=a_t$にたいしては非超過側，$b=b_t$に対しては超過側を同時に満たす確率がtになるように(a_t, b_t)の組を求める。このようにして得られた母数の信頼性Rは(8)式によって表される。従って，いまそれらの母数を用いて(9)式によりT年確率水文量を算定するならば，その信頼性はRであると考えられ，それを"信頼性を付与した確率水文量"とする。

さらに，ここではデータのもつ情報量と"信頼性を付与した確率水文量"をともに記した"情報量と信頼性を付与した確率水文量"を考え，それを「情報量がI(nat)のT年確率水文量はR%の信頼性をもってx_T(mm/day)以内におさまる」と表現する。情報量の単位には(nat)を採用した。

表－1　式の一覧

$$g(x)=a\ \exp\{-a(x-b)-e^{-a(x-b)}\} \quad (1)$$

$$p(a,b)=1/(a_2-a_1)(b_2-b_1) \quad (2)$$

$$h(a,b)=a^n\ \exp\{-an(\bar{x}-b)-\sum_{i=1}^{n} e^{-a(x_i-b)}\} \quad (3)$$

$$f(a,b\mid x(n))=K\ h(a,b) \quad (4)$$

$$H(a,b)=\ln(a_2-a_1)(b_2-b_1) \quad (6)$$

$$I(a,b\mid x(n))=\ln(a_2-a_1)(b_2-b_1)-H(a,b\mid x(n)) \quad (7)$$

$$R=100\times(1-t) \quad (8)$$

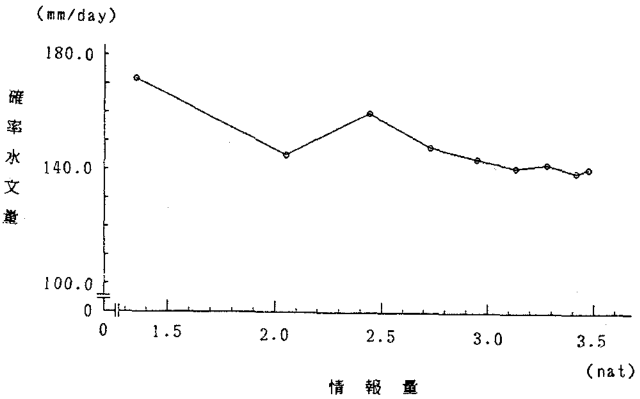
$$x_T=b-\ln\{\ln(T/T-1)\}/a \quad (9)$$

$$\begin{aligned}H(a,b\mid x(n)) &= -\ln K \\ &-Kn\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\ln a\ h(a,b)\,db\,da \\ &+Kn\bar{x}\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}a\ h(a,b)\,db\,da \\ &-Kn\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}ab\ h(a,b)\,db\,da \\ &+K\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\sum_{i=1}^{n}e^{-a(x_i-b)} \cdot h(a,b)\,db\,da \quad (5)\end{aligned}$$

3．実データの適用と考察

実データとして長野の年最大日降水量を用い，データ数は観測された年代の古い順に$n=1,2,\cdots,N$とした。また，事前情報にはそれぞれ$a_1=0.02$，$a_2=0.15$，$b_1=40.0$，$b_2=80.0$を与えた。

図－1には，データのもつ情報量とそのときの90％の信頼性をもつ100年確率水文量の変動が示してある。この図より，情報量が3.0(nat)程度から大きく変動することなくほぼ安定した確率水文量が得られていることがわかる。また，全データを用いたときの”情報量と信頼性を付与した確率水文量”は，ここでは具体的に，「情報量が3.5(nat)の100年確率水文量は90％の信頼性をもって140.6(mm/day)以内におさまる」と表現できる。



図－1　情報量及び確率水文量

4．おわりに

本稿では，長野の年最大日降水量にガンベル分布を適用して，両方の母数を共に未知とした場合について，データのもつ情報量とそのときの”信頼性を付与した確率水文量”の変動性を明らかにするとともに，全データを用いたときの”情報量と信頼性を付与した確率水文量”を算定した。今後は水文統計上必要とされる他の分布に対しても同様の検討を行いたい。なお，本研究は，昭和６３年度財団法人長野県科学振興会発明・研究助成金の援助を得た。計算作図等では（株）大本組高橋浩一君（当時信州大学工学部学生）に協力頂いた。記して謝意を表する。

1)草刈，荒木，寒川，上原：ガンベル分布の推定母数の信頼性，第42回土木学会年講，1987年。
2)荒木，寒川，草刈，田辺：推定母数の信頼性評価の諸特性，62年度中部支部講演集，1988年。
3)草刈，寒川，荒木，高橋：信頼性を付与した確率水文量の評価，63年度中部支部講演集，1989年。