

II-34

Taylor-Galerkin 法による洪水氾濫解析

京都大学防災研究所 正員 岡 太郎・〇近森 秀高

1. はじめに これまで、Galerkin 法に基づく洪水氾濫解析モデルについて検討を進めてきた¹⁾。このモデルでは、時間微分に関する係数行列を対角行列に集中化するとき、スキームのバランスを損ない、計算精度に悪影響を及ぼすことが判明した。ここでは、Taylor-Galerkin 法²⁾を用いてこれらの問題の解決を試みる。

2. 基礎方程式 二次元氾濫の基礎方程式は次のとおりである。

$$h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0 \cdots (1)$$

$$u_t + uu_x + vu_y + g(h+z)_x + uR = 0 \cdots (2), \quad v_t + uv_x + vv_y + g(h+z)_y + vR = 0 \cdots (3)$$

ここに、 h : 水深、 u, v : x, y 方向の流速成分、 z : 標高、下付き添字の x, y, t は偏微分を表す。 uR, vR は抵抗を表す項であり、ここでは Chezy の抵抗則を用い、 $R = g\sqrt{u^2 + v^2}/(c^2 h)$ (c : Chezy 数)とする。

3. Taylor-Galerkin 法による定式化 解析領域 D を有限要素で分割するとともに各節点に連続番号を付すものとする。この場合、第 j 節点における、第 $n+1$ 時間ステップの u, v, h は Taylor 級数を用いて次のように表される。

$$h_j^{n+1} = h_j^n + \Delta t (h_t)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} (h_{tt})_j^n \cdots (4), \quad u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t (u_t)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} (u_{tt})_j^n \cdots (5),$$

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t (v_t)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} (v_{tt})_j^n \cdots (6)$$

Δt : 時間増分。この(4)~(6)式の h_{tt}, u_{tt}, v_{tt} は(1)~(3)式を t, x, y で偏微分し、整理すると次のように表される。

$$h_{tt} - \{ [uu_x + vu_y + g(h+z)_x + uR]_h \}_x - \{ [u[uh_x + vh_y + h(u_x + v_y)]] \}_x \\ - \{ [uv_x + vv_y + g(h+z)_y + vR]_h \}_y - \{ [v[uh_x + vh_y + h(u_x + v_y)]] \}_y = 0 \cdots (7)$$

$$u_{tt} - \{ [uu_x + vu_y + g(h+z)_x + uR]_u \}_x - [uv_x + vv_y + g(h+z)_y + vR]_u - v [uu_x + vu_y + g(h+z)_x + uR]_y \\ - g [uh_x + vh_y + h(u_x + v_y)]_x - R [uu_x + vu_y + g(h+z)_x + uR] = 0 \cdots (8)$$

$$v_{tt} - [uu_x + vu_y + g(h+z)_x + uR]_v - u [uv_x + vv_y + g(h+z)_y + vR]_x - \{ [uv_x + vv_y + g(h+z)_y + vR] \}_y \\ - g [uh_x + vh_y + h(u_x + v_y)]_y - R [uu_x + vu_y + g(h+z)_y + uR] = 0 \cdots (9)$$

ここで、(1)~(3)式、(7)~(9)式を Galerkin 法を用いて離散化すると次のように表される。

$$[M] \{h_t\}_j = f^1 \cdots (10)$$

$$[M] \{h_{tt}\}_j = f^4 = f^4_0 + f^4_1 \cdots (13)$$

$$[M] \{u_t\}_j = f^2 \cdots (11)$$

$$[M] \{u_{tt}\}_j = f^5 = f^5_0 + f^5_1 \cdots (14)$$

$$[M] \{v_t\}_j = f^3 \cdots (12)$$

$$[M] \{v_{tt}\}_j = f^6 = f^6_0 + f^6_1 \cdots (15)$$

ここに、 $[M]$: 集中行列、 $f^1 \sim f^6$: 荷重ベクトル。ただし、左辺の係数行列は陽的スキームを得るために集中化してある。(13)~(15)式の右辺の $f^4_1 \sim f^6_1$ は Green の公式を用いることによって生ずる境界に関する項であり、例えば、 f^4_1 は次のようになる。

$$f^4_1 = \int_{\partial D} N_i [uu_x + vu_y + g(h+z)_x + uR]_h \nu_x ds + \int_{\partial D} N_i u [uh_x + vh_y + h(u_x + v_y)] \nu_x ds \\ + \int_{\partial D} N_i [uv_x + vv_y + g(h+z)_y + vR]_h \nu_y ds + \int_{\partial D} N_i v [uh_x + vh_y + h(u_x + v_y)] \nu_y ds \cdots (16)$$

ここに、 N_i : 重み関数、 ∂D : 解析領域 D を囲む境界、 ν_x, ν_y : 境界に立てた単位法線ベクトルの x, y 成分。ところで、(16)式は(1)~(3)式を用いて次のように書き換えられる。

$$f_{B^f} = - \int_{\partial D} N_i u_t h \nu_x ds - \int_{\partial D} N_i u_t h \nu_y ds - \int_{\partial D} N_i v_t h \nu_x ds - \int_{\partial D} N_i v_t h \nu_y ds \quad \dots (17)$$

すなわち、 f_{B^f} の計算には(10)～(12)式から求められた h_t, u_t, v_t の値を用いることができる。同様に f_{B^g} 、 f_{B^g} の計算にも(10)～(12)式の計算結果を用いることができる。

この、(10)～(15)式より計算された $h_t, u_t, v_t, h_{tt}, u_{tt}, v_{tt}$ を(4)～(6)式に代入し、逐次、解を求めていく。

境界条件として、流入出部には水深を与え、流速は境界に垂直な成分のみとする。また、流入出のない境界では法線方向の流速成分を0とする。なお、本モデルでは三角形要素を用いて解析領域の分割を行うが、洪水波先端部の要素において、3節点すべての水深がある微小水深 ε 以下のときには計算領域から除外する。洪水波先端部をこのように取扱うと、新たな境界を生ずることになるが、この部分でも(13)～(15)式の $f_{B^f} \sim f_{B^g}$ の計算を行う。

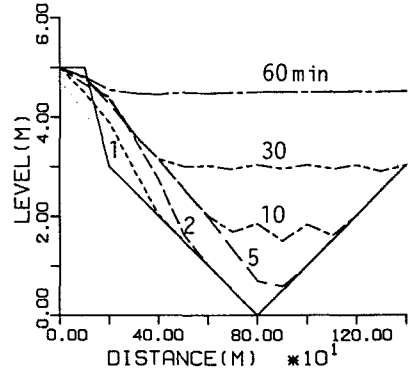


図1 対称軸上の水位変化

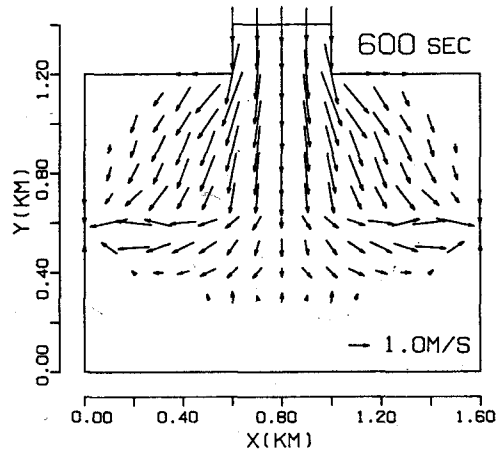


図2 流速ベクトル図（600秒後）

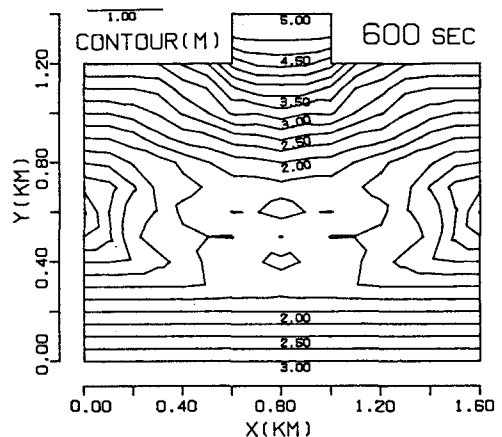


図3 等水位線図（600秒後）

4. 氾濫シミュレーション 氾濫域は1600m×1200mの長方形で、y軸の中央で3m下がっている。この氾濫域に幅400m、長さ200mの流入部を付け、流入点の水深を2mに固定して氾濫計算を行うことにする。解析領域を三角形要素で分割し（節点数231、要素数 400）、 $\Delta t = 2 \text{ sec}$ 、 $c = 30$ 、 $\varepsilon = 1 \text{ mm}$ として得られた対称軸($x = 0.8 \text{ km}$)上の水位変化を図1に、600秒後の流速ベクトルを図2に、等水位線を図3に示す。計算結果は、氾濫域中央部で若干の凹凸がみられる以外は洪水波伝播の過程をうまく再現している。

5. おわりに Taylor-Galerkin 法を用いることにより、離散化後のスキームのアンバランスが改善されることが明らかになった。しかし、氾濫流が対面斜面を上昇するときに若干の振動が認められるなど、改良すべき点も残されている。

《参考文献》

- 1) 岡：益田川下流域の洪水氾濫解析，土木学会第43回年次講演会講演概要集vol.43, 1988, pp.148-149
- 2) N.D.Katopodes et al: Explicit Computation of Discontinuous Open Channel Flow, Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol.112, No.6, June, 1986, pp.456-475